Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 5 – Kernideen und Kontexte

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 5 – Kernideen und Kontexte

- Sie kennen das Konzept von Kernideen als das Wesen des Lerngegenstands.
- Sie kennen Kernideen zu einzelnen Lerngegenständen.
- Sie können gegebene Kontexte zu Lerngegenständen hinsichtlich ihrer Sinnstiftung beurteilen.
- Sie sind sich der Möglichkeiten und Bedeutung horizontaler und vertikaler Mathematisierung bewusst.

Stoffdidaktische Analyse als Spezifizieren & Strukturieren von Lerngegenständen

	Spezifizieren	Strukturieren
konkrete Ebene	- **Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren leiten? - **Welche** (inner- und außermathematischen) **Kontexte** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?	- Wie kann das Verständnis sukzessive **über realitätsbezogene Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden konstruiert werden (vgl. *horizontale Mathematisierung*)? - Wie kann der Lernpfad **in Bezug auf die mathematische Problemstruktur** angeordnet werden (vgl. *vertikale Mathematisierung*)?

konkrete Ebene ≠ konkrete Unterrichtsplanung

(angelehnt an Hußmann & Prediger, 2016)

Lerngegenstand

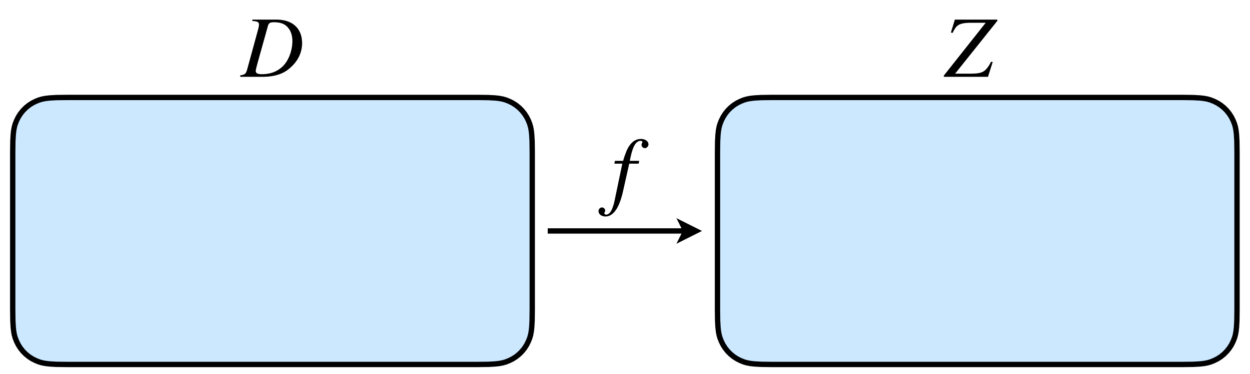
Formale Grundlagen **Fundamentale Ideen** **Grundvorstellungen**

Kernideen und Kernfragen

Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

Funktionen

Formale Grundlagen



$$f \subseteq D \times Z$$

f linkstotal und rechtseindeutig, d.h.

$$\forall x \in X \ \exists! y \in Z : (x, y) \in f$$

Fundamentale Ideen

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren
- …

Muster erkennen

Algebraisierung

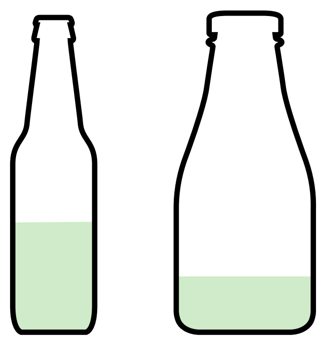
(vgl. Thiel-Schneider, 2018, S. 31).

Grundvorstellungen

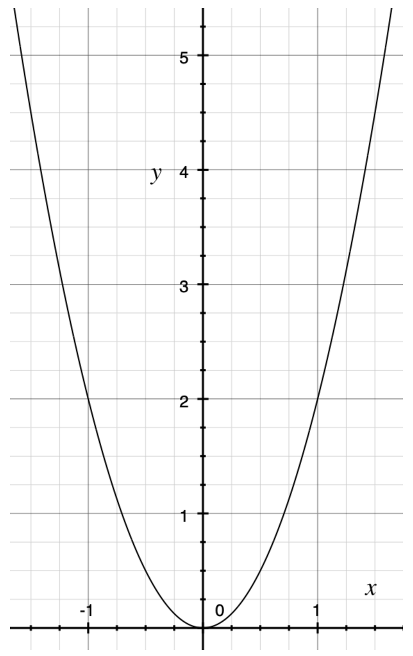
Zuordnung

x	– 2	– 1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Änderung/Kovariation



Objekt



Kernideen und Kernfragen

Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

Funktionen

Kernideen und Kernfragen

Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

Mithilfe von Funktionen kann man die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und daraus weitere Werte bestimmen.

Vorschauperspektive

Rückschauperspektive

»Wie kann man die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann man damit weitere Werte bestimmen?« (Thiel-Schneider, 2018, S. 49).

Kernfrage

Kernideen und Kernfragen

Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

Eine **Kernidee** beschreibt in wenigen Worten das Wesen* eines Lerngegenstands.

*also das, was ihn aus formaler und semantischer Perspektive auszeichnet – insbesondere in Abgrenzung zu thematisch ähnlichen Lerngegenständen

Eine **Kernfrage** stellt die Kernidee in Frageform aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler dar.

Kernideen und Kernfragen verfolgen eine ***Vorschauperspektive***, die der Orientierung und Initiierung der Auseinandersetzung mit dem neuen Lerngegenstand dient, sowie eine ***Rückschauperspektive***, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, ihren eigenen Lernprozess zu reflektieren und den Lerngegenstand einzuordnen.

(angelehnt an Leuders et al. 2011, S. 8)

Kernideen und Kernfragen

Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

Quadratische Funktionen

Wie kann ich krumme Kurven beschreiben?

(Barzel et al., 2016, S. 190)

Konstruktion von Dreiecken

Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?

(Leuders et al., 2015, S. 164)

Negative Zahlen

Wie kann ich rechnen, wenn ich mehr wegnehme, als ich habe?

(Leuders et al., 2015, S. 74)

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wie kann ich einschätzen, einem medizinischen Testergebnis zu vertrauen?

Vorschauperspektive: Orientierung, Initiierung der Auseinandersetzung mit Lerngegenstand

Rückschauperspektive: Reflexion des eigenen Lernprozesses, Einordnung des Lerngegenstands

Orientierungshilfe zum Finden von Kernideen und Kernfragen

Eine **Kernidee** beschreibt in wenigen Worten das Wesen eines Lerngegenstands.
In der *Rückschauperspektive* ermöglicht sie, den Lernprozess zu reflektieren und den Lerngegenstand einzuordnen.

Eine **Kernfrage** stellt die Kernidee in Frageform aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler dar.
In der *Vorschauperspektive* dient sie der Orientierung und Initiierung der Auseinandersetzung mit dem neuen Lerngegenstand.

1. Führe die stoffdidaktische Analyse auf **formaler** und **semantischer** Ebene durch.
2. Sammle **Anregungen** zum Wesen des Lerngegenstands bei der Durchsicht von Schulbüchern und fachdidaktischer Literatur.
3. Beantworte folgende Prüffragen, um das **Wesen** des Lerngegenstand zu präzisieren:
   - ☐ Inwiefern ist der Lerngegenstand ein **Spezialfall**, ein **Nebenfall** oder eine **Verallgemeinerung** verwandter Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren?
   - ☐ Welche **Grundvorstellungen** sollen die Schülerinnen und Schüler zum Lerngegenstand entwickeln? Welche **Darstellungen** helfen dabei?
   - ☐ Welche (ggf. auch historisch) **bedeutsamen Probleme** lassen sich mit dem Lerngegenstand lösen, die vorher nicht lösbar waren?
4. Formuliere die **Kernidee** zum Lerngegenstand (und ggf. Kernideen zu verwandten Lerngegenständen) in der Rückschauperspektive.
5. Formuliere eine **Kernfrage** zum Lerngegenstand in der Vorschauperspektive.

Quadratische Funktionen

»Wie kann ich krumme Kurven beschreiben?«

(Barzel et al., 2016, S. 190)

Kontexte

!

Ein **sinnstiftender Kontext** ist ein Ausschnitt einer inner- oder außermathematischen Welt, der folgende Anforderungen möglichst gut erfüllt:

- Er ist anschlussfähig an die Erfahrungen, Interessen und die Denk- und Handlungsmuster der Lernenden **(Lebensweltbezug)**.
- Er ermöglicht es, authentische Fragen zu bearbeiten und dabei auch etwas über den Kontext zu lernen **(Kontextauthentizität)**.
- Er ist problemhaltig und offen genug, um Lernende zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen **(Reichhaltigkeit)**.

(Leuders et al. 2011, S. 4)

Kernfragen / Kernideen

Funktionen

»Wie kann ich die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann ich damit weitere Werte bestimmen?« (Thiel-Schneider, 2018, S. 49).

Lineare Funktionen

Wie kann ich sich gleichmäßig verändernde Prozesse beschreiben?

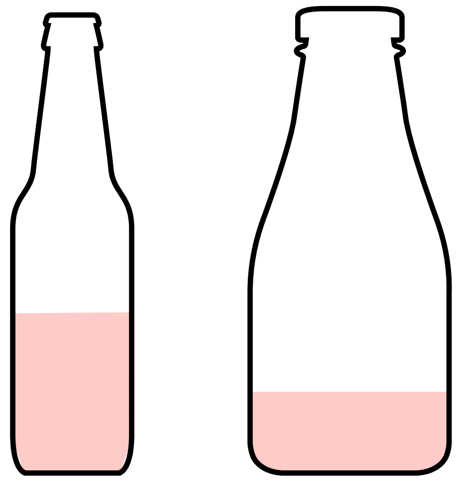
Quadratische Funktionen

»Wie kann ich krumme Kurven beschreiben?« (Barzel et al., 2016, S. 190)

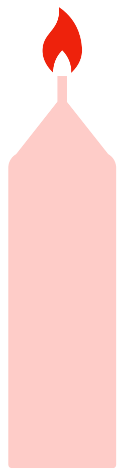
Sinnstiftender **Kontext**

Ausschnitt aus inner- oder außermathematischer Welt; erfüllt folgende Anforderungen möglichst gut:

Lebensweltbezug: anschlussfähig an Erfahrungen, Interessen, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden
Kontextauthentizität: ermöglicht, authentische Fragen zu bearbeiten und etwas über den Kontext zu lernen
Reichhaltigkeit: problemhaltig und offen genug, um zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen (vgl. Leuders et al. 2011)



Füllexperimente



Abbrennen einer Kerze

Analyse eines Ballwurfs

Kernfragen / Kernideen

Wurzel

Wie kann ich Quadrieren rückwärts rechnen?

Term

Wie kann ich komplizierte Berechnungen übersichtlich darstellen?

Sinnstiftender **Kontext**

Ausschnitt aus inner- oder außermathematischer Welt; erfüllt folgende Anforderungen möglichst gut:

Lebensweltbezug: anschlussfähig an Erfahrungen, Interessen, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden
Kontextauthentizität: ermöglicht, authentische Fragen zu bearbeiten und etwas über den Kontext zu lernen
Reichhaltigkeit: problemhaltig und offen genug, um zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen (vgl. Leuders et al. 2011)

Quadrat mit halben Flächeninhalt finden

Rechentricks

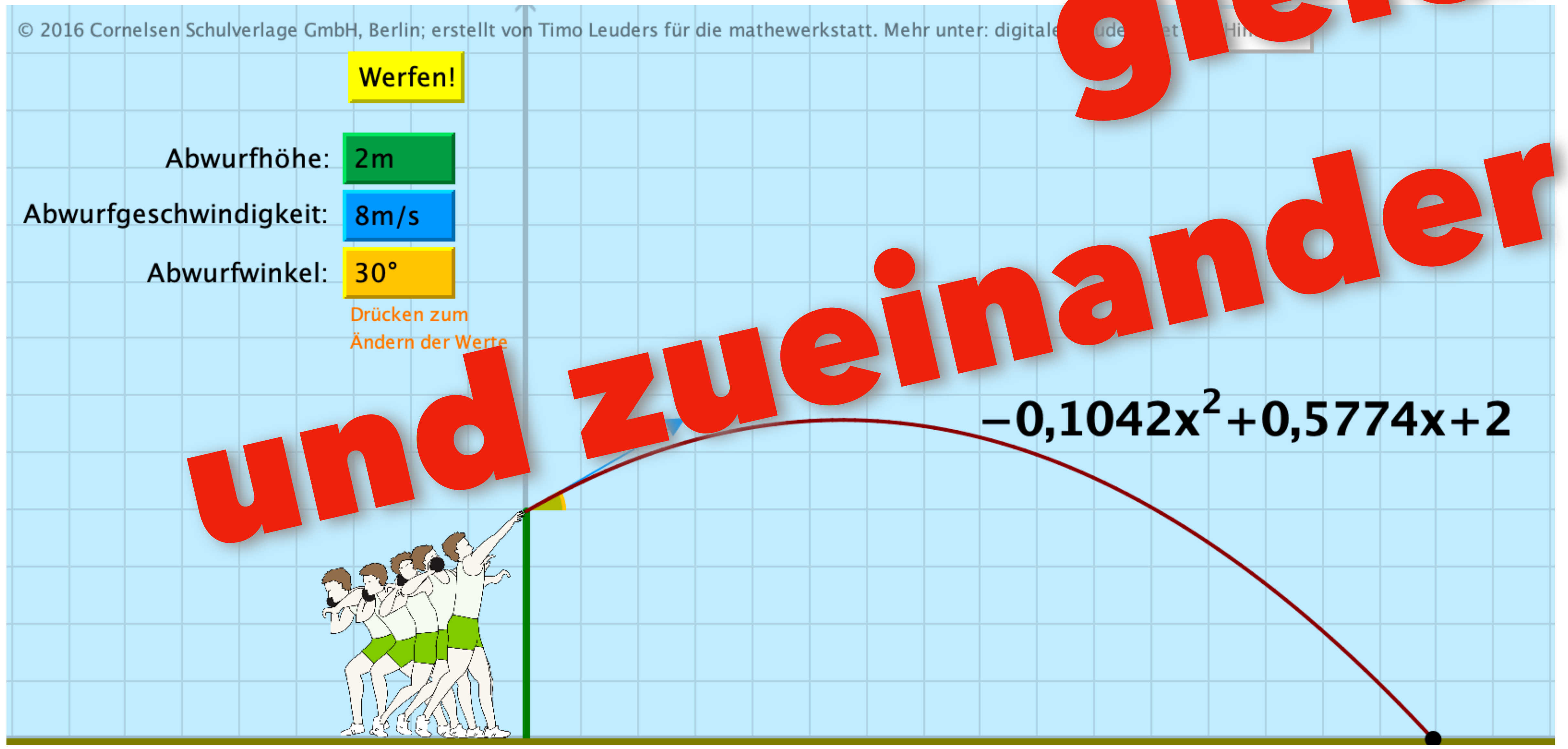
horizontale Mathematisierung

Beschreiben, Ordnen und Lösen realer Situationen und alltäglicher Probleme mithilfe mathematischer Objekte und Operationen

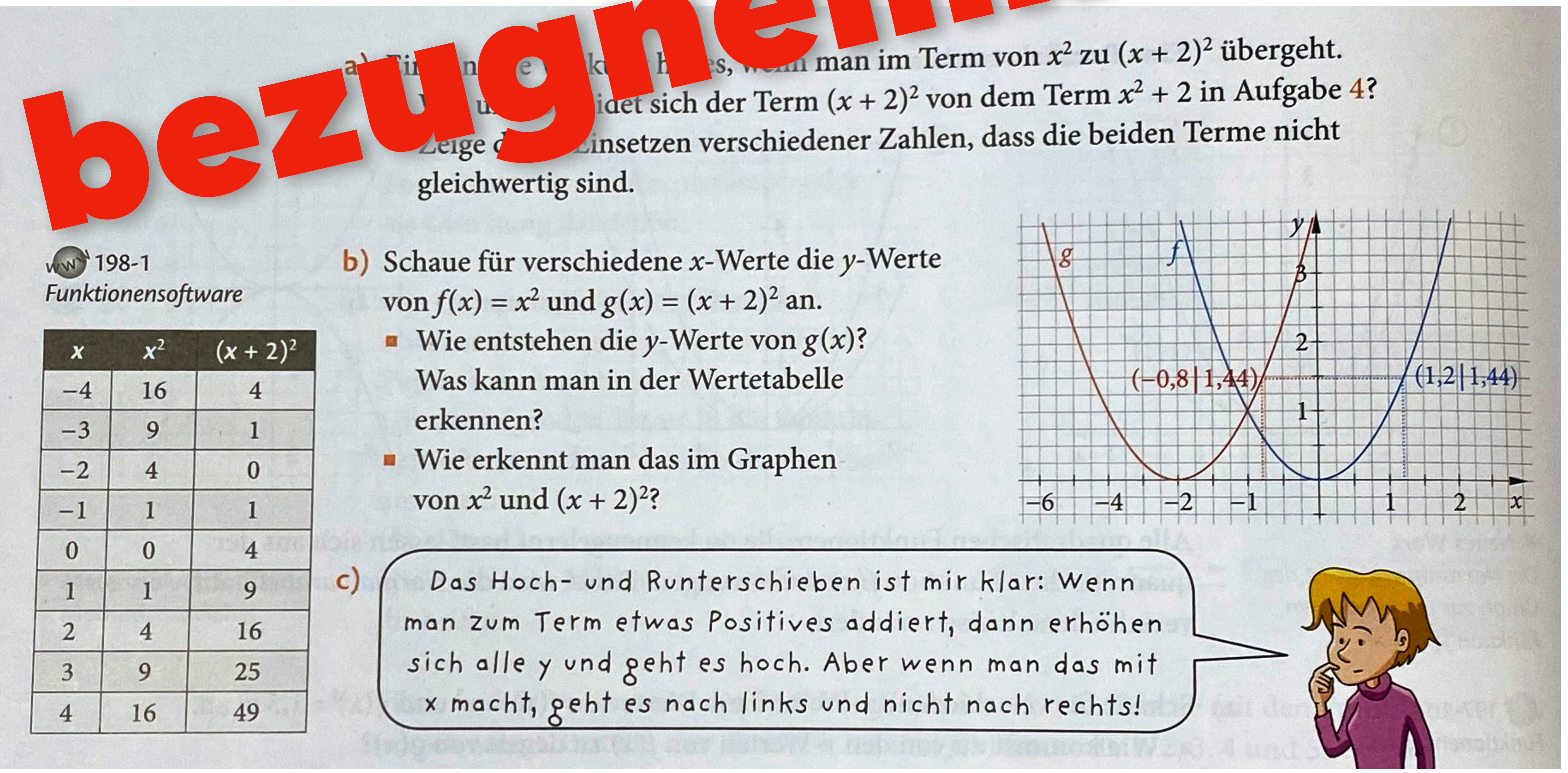
vertikale Mathematisierung

Reorganisieren und Operieren innerhalb des mathematischen Systems

beides gleichwertig und zueinander bezugnehmend



(Barzel et al., 2016, S. 194)



a) … man im Term von x^2 zu $(x+2)^2$ übergeht. … idet sich der Term $(x+2)^2$ von dem Term $x^2 + 2$ in Aufgabe 4? Zeige d… Einsetzen verschiedener Zahlen, dass die beiden Terme nicht gleichwertig sind.

198-1 *Funktionensoftware*

x	x^2	$(x+2)^2$
−4	16	4
−3	9	1
−2	4	0
−1	1	1
0	0	4
1	1	9
2	4	16
3	9	25
4	16	49

b) Schaue für verschiedene x-Werte die y-Werte von $f(x) = x^2$ und $g(x) = (x+2)^2$ an.
- Wie entstehen die y-Werte von $g(x)$? Was kann man in der Wertetabelle erkennen?
- Wie erkennt man das im Graphen von x^2 und $(x+2)^2$?

c) Das Hoch- und Runterschieben ist mir klar: Wenn man zum Term etwas Positives addiert, dann erhöhen sich alle y und geht es hoch. Aber wenn man das mit x macht, geht es nach links und nicht nach rechts!

(Barzel et al., 2016, S. 198)

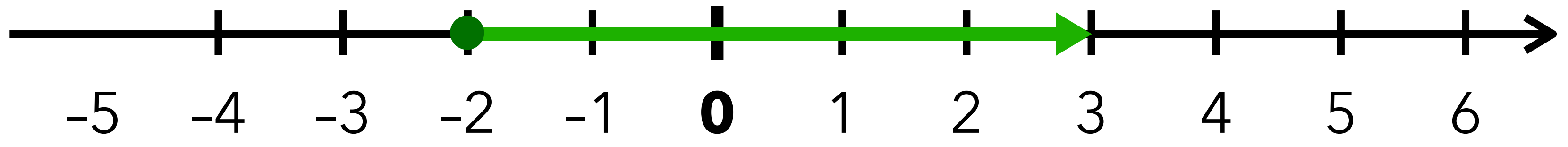
Beispiel $\mathbb{Z}$

Formale Grundlagen

- als Zahlenpaar: [(0,2)] = [(5,7)] ≡ – 2 oder als Gegenzahl: – 2 vs. 2
- n – m mit m > n nun lösbar
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- Rechenregeln nach Permanenzprinzip erweitert

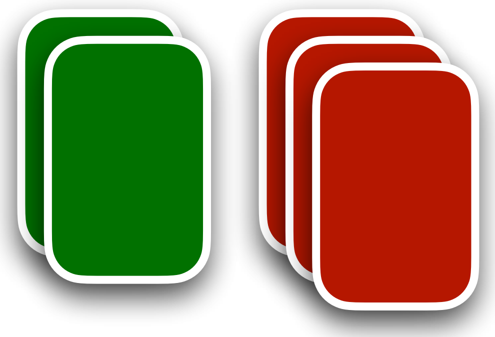
Fundamentale Ideen

- Vernetzung, Verallgemeinerung, Erweiterung



Grundvorstellungen

- als relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- als Gegensätze
- als Richtungen
- als Zustände und Zustandsänderungen



Kernideen / Kernfragen

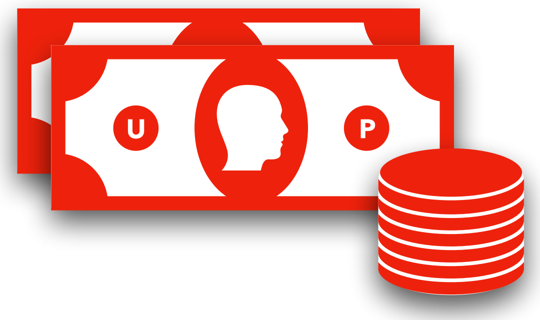
Vorschauperspektive & Rückschauperspektive

- Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?
- Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

(Leuders et al., 2015, S. 80, 82)

Kontexte

Lebensweltbezug, Kontextauthentizität & Reichhaltigkeit



Mathematisierung

horizontal & vertikal

- horizontal: z. B. mehrfache Schulden
- vertikal: z. B. Permanzenreihen
- Ergänzung: Blick- und Bewegungsrichtung beim Rechnen auf Zahlenstrahl

Beispiel $\mathbb{Z}$

Formale Grundlagen

Fundamentale Ideen

Grundvorstellungen

Kernideen / Kernfragen
Vorschauperspektive & Rückschauperspektive

Kontexte
Lebensweltbezug, Kontextauthentizität & Reichhaltigkeit

Mathematisierung
horizontal & vertikal

Schwierigkeiten und Herausforderungen

- Minus-Zeichens als Vor-, Rechen- und Inversionszeichen $-5+2$ $7-3$ $-a$
- Kardinalzahlaspekt nicht mehr tragfähig
- Fehlinterpretation der Ordnungsrelation (nicht mehr über Mächtigkeit möglich; fehlerhafte spiegelbildliche Interpretation) $-5 > -3$
- »negativ« als Wort mit mehreren verschiedenen Bedeutungen (*homonym*)

  negative Stimmung negativer Corona-Test negative Zahl

- Generalisierung der Vorstellung »Hinzufügen vermehrt immer«
  - Übertragung von Vorstellung bei Addition als Hinzufügen
  - wird teils auch sprachlich gestützt
- komplexer Wortschatzaufbau, abhängig vom Kontext

»Obergeschoss«	»Meeresspiegel«	»Plusgrade«
»Erdgeschoss«	»Normal-Null«	»Gefrierpunkt«
»Untergeschoss«	»Tauchtiefe«	»Minusgrade« »Frost«

- Vermischung der Rechenregeln

bewusste Sprachbildung

(wenige) Kontext(e) für Einführung auswählen

Kalkül vermeiden

Beispiel $\mathbb{Z}$

Formale Grundlagen

Fundamentale Ideen

Grundvorstellungen

Kernideen / Kernfragen

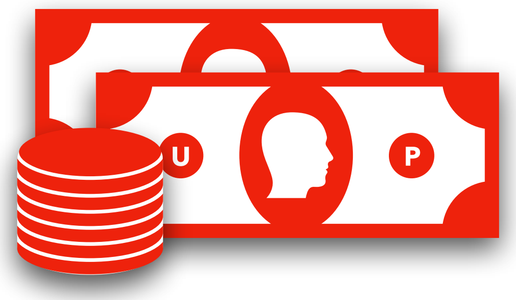
Kontexte

Mathematisierung **horizontal & vertikal**

Schwierigkeiten und Herausforderungen

All das beeinflusst die Auswahl und Anordnung der Unterrichtsinhalte

Vorschlag eines Lernpfades zu $\mathbb{Z}$



Erfahrungen zum Umgang mit Guthaben/Schulden → Negative Zahlen als Beschreibungsinstrument für Schulden → Negative Zahlen als neue Zahlen → Repräsentation über Zahlengerade

Zustände und Zustandsänderungen

Gegensätze

relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke

Negative Zahlen als neuer Zahlenbereich

Richtungen

Ordnen und Vergleichen → Addieren/Subtrahieren (horizontal und vertikal) → Multiplizieren (horizontal und vertikal) → Dividieren durch Regelübertragung

Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?

Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2016). *Mathewerkstatt. 9, Schulbuch* (1. Auflage). Cornelsen.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *53*(37), 2–9. https://www.researchgate.net/publication/233978329

Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2015). *Mathewerkstatt. 7, Schulbuch* (1. Auflage). Cornelsen.

Thiel-Schneider, A. (2018). Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes. In A. Thiel-Schneider, *Zum Begriff des exponentiellen Wachstums* (S. 23–57). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21895-9_4