Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

Stoffdidaktik Mathematik

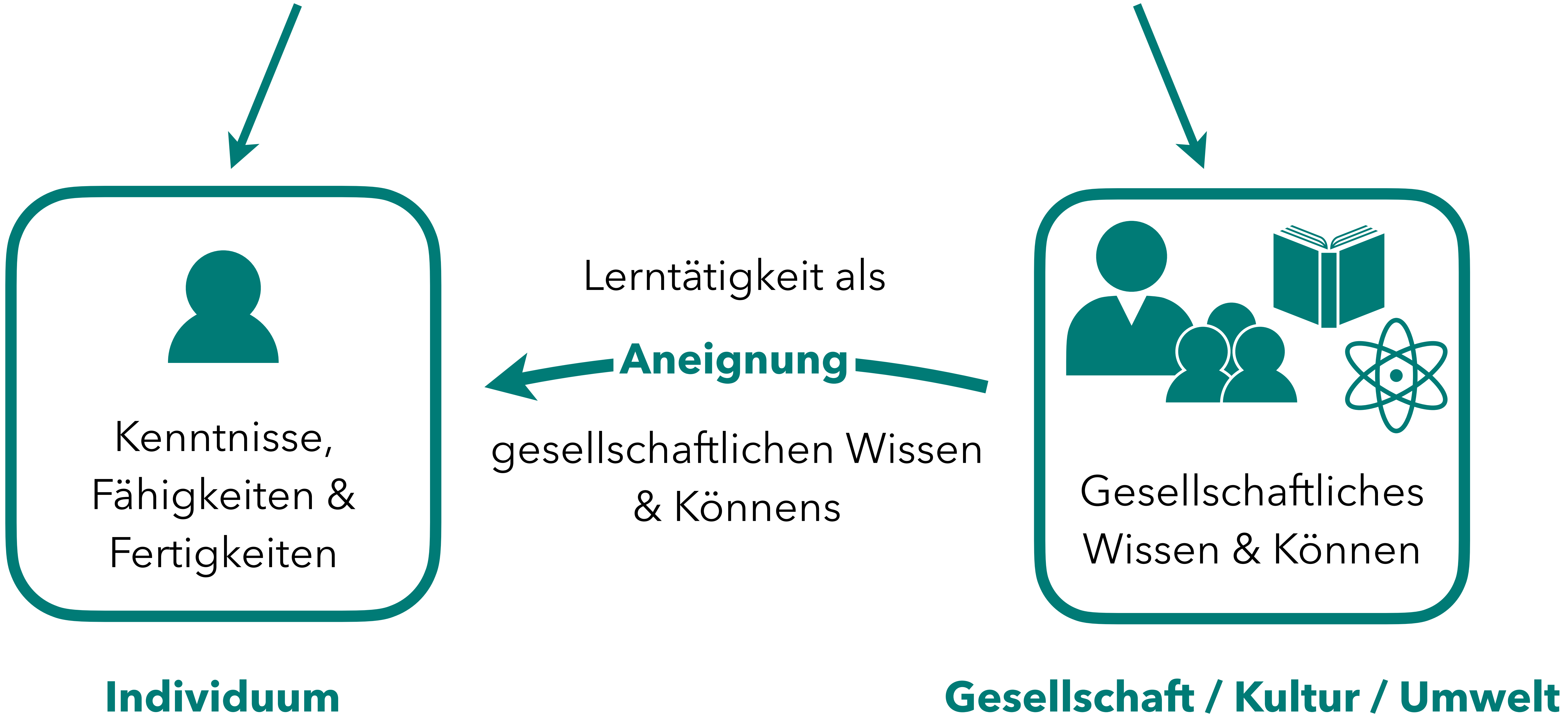
Kapitel 3 – Sinn und Bedeutung

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 3 – Sinn und Bedeutung

- Sie kennen das Konzept der fundamentalen Ideen und greifen auf dieses zurück, wenn sie Sie die Bedeutung einzelner Lerngegenstände für den Mathematikunterricht diskutieren.
- Sie können die Grundvorstellungsidee beschreiben und wissen über deren Bedeutung für den Mathematikunterricht.
- Sie kennen Grundvorstellungen zu einzelnen mathematischen Begriffen.

Sinn und Bedeutung



Bedeutung des Lerngegenstands

- fachwissenschaftliche Bedeutung
  - z. B. Fundamentale Ideen
- gesellschaftliche Bedeutung
  - Nützlichkeit / Anwendbarkeit
  - Beitrag zur Berufs- und Studienorientierung
- historische und kulturelle Bedeutung

Bedeutungen von Lerngegenständen sind im ständigen Wandel!

KI

- **Welche** (mathematisch-gesellschaftliche) **Bedeutung** liegt hinter dem Lerngegenstand (vgl. *Fundamentale Ideen*)?
- **Welcher Sinn** soll bei den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich des Lerngegenstands entwickelt werden und **welche Repräsentationen** sind dafür geeignet (vgl. *Grundvorstellungen*)?
- Wie **verhalten** sich Sinn und Bedeutung des Lerngegenstands **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?

Fundamentale Ideen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sowie $f : U \to \mathbb{R}^m$.

f heißt in $x_0 \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine „Fehlerfunktion“ $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + r(h)$$

mit $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$

Fundamentale Ideen
Beispiel: Linearität

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sowie $f : U \to \mathbb{R}^m$.

f heißt in $x_0 \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine **lineare Abbildung** $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und eine „Fehlerfunktion" $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + r(h)$$

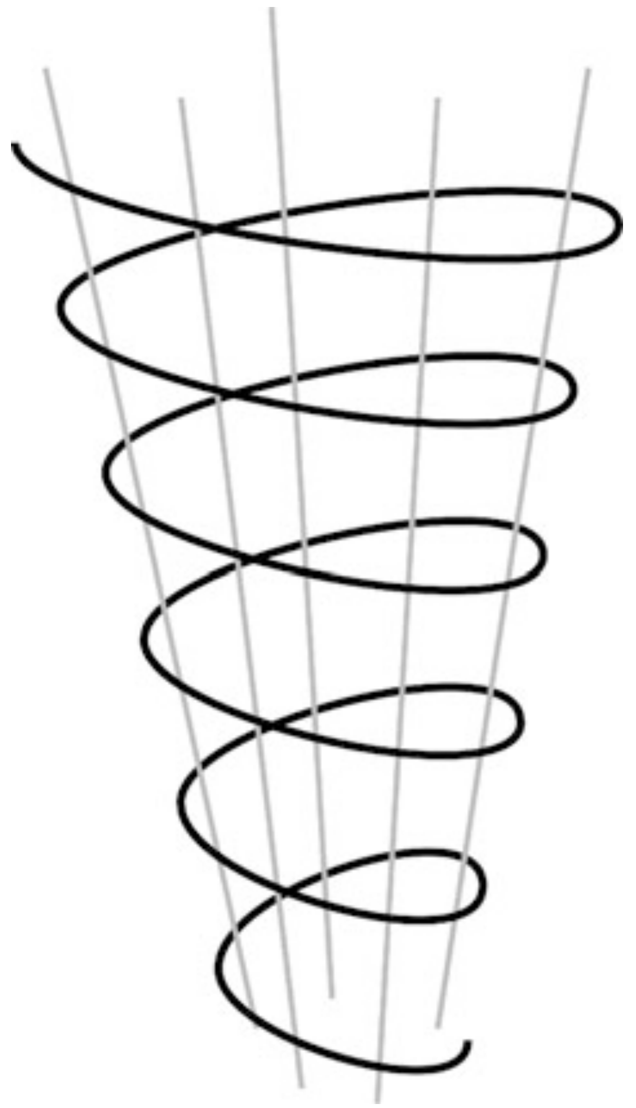
mit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$

also eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit
$A(h) = \mathbf{M} \cdot h$ für alle $h \in \mathbb{R}^n$

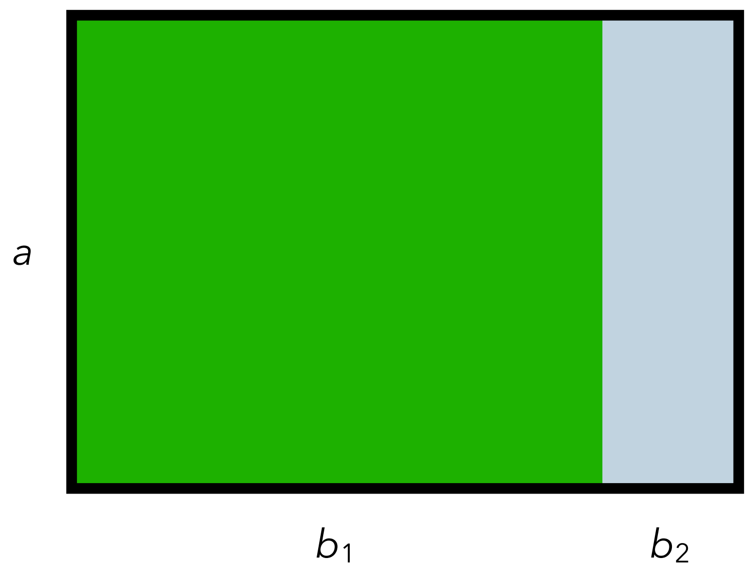
Linearität

»Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden.«

(Bruner, 1976, S. 77)



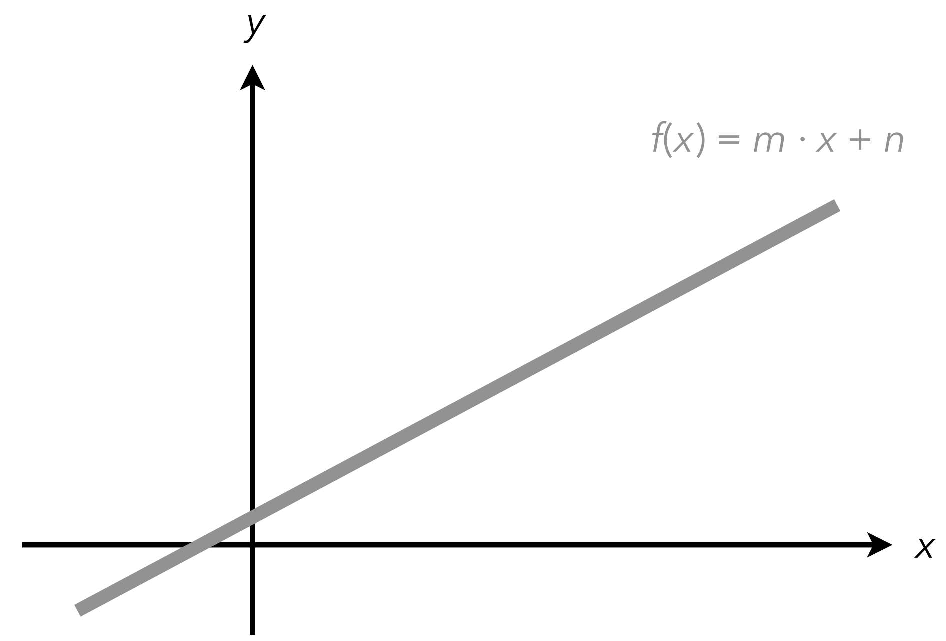
(Krauthausen, 2018, S. 226, © A. Eicks)



$a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2$

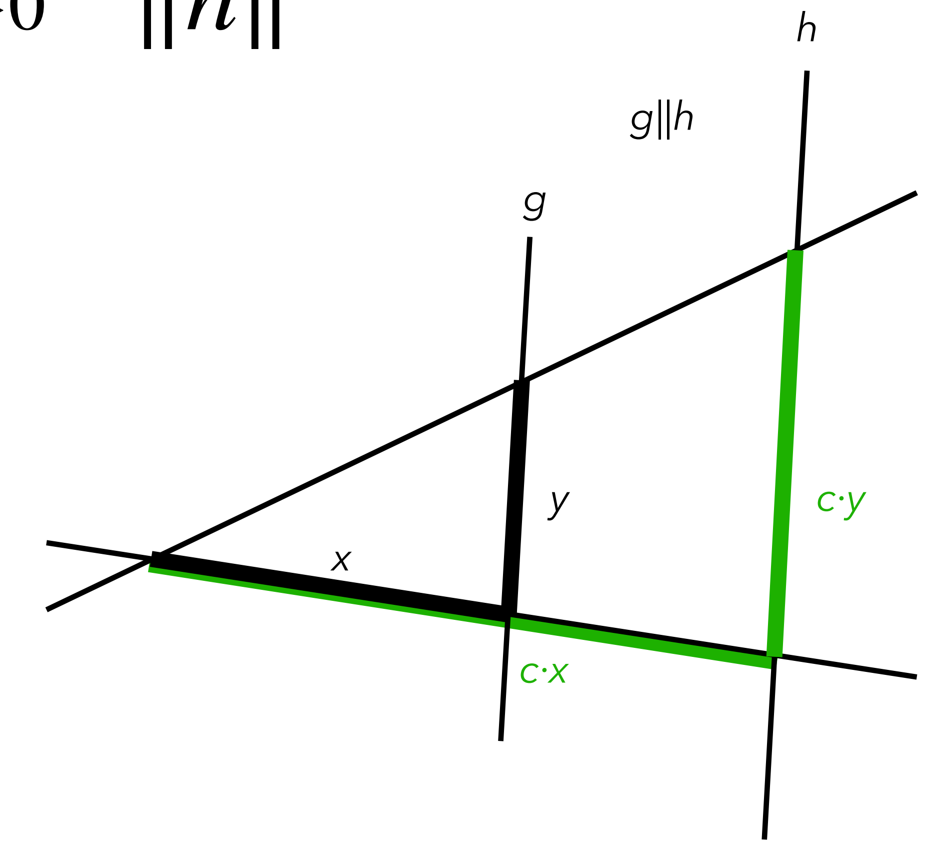
$$\begin{vmatrix} 2x + 3y = 11 \\ -4x - 3y = -7 \end{vmatrix}$$

$\sin(x) \approx x$ für $x \approx 0$



$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathbf{M} \cdot h + r(h)$$

mit $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$



(Danckwerts, 1988)

Linearität

Anfang 1. Jtsd. n. Chr.
Lineare Interpolation

16. Jh.
systematische Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

1729
Lösung eines Systems von drei Gleichungen in drei Unbekannten

1715
Taylor: »Linear perspective«

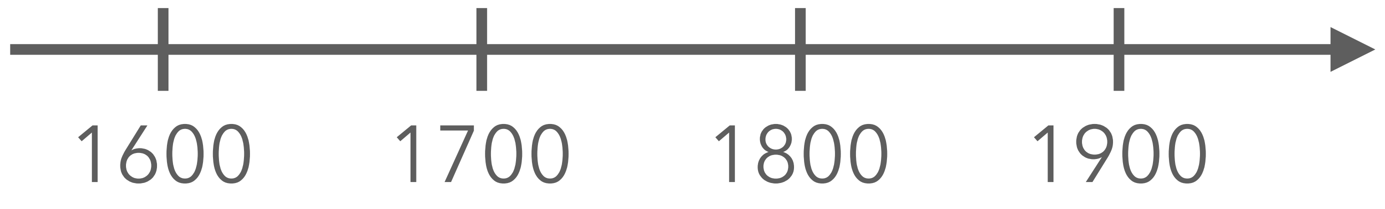
1750
Lösung regulärer linearer Gleichungssysteme in zwei, drei und vier Unbekannten

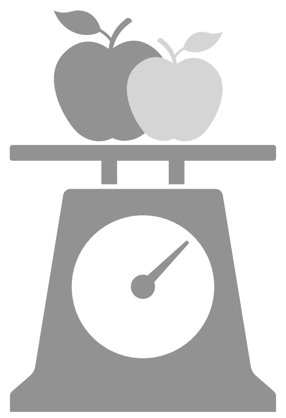
17./18. Jh.
(m x n)-Schreibweise als abkürzende Schreibweise für eine lineare Substitution

1850
(*m* x *n*)-Schema als Matrix

18./19. Jh.
Gauß-Algorithmus

(Tietze et. al, 2000b, S. 73 ff.; Brückler, 2018, S. 39, 107, 119)





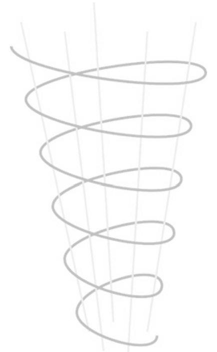
prop. Zuordnungen im Alltag

lineare Erzählung

lineares Fernsehen

Linearität

vertikal



horizontal

historisch

sinnvoll

fundamental!

Fundamentale Ideen

Eine **Fundamentale Idee** bzgl. eines Gegenstandsbereichs (Wissenschaft, Teilgebiet) ist ein **Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema**, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (**Horizontalkriterium**),
2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (**Vertikalkriterium**),
3. in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (**Zeitkriterium**),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (**Sinnkriterium**).

(Schwill, 1994)

Fundamentale Ideen

- Zahl
- Algorithmus
- Maß
- Raum und Form
- Funktion
- Zufall

- Kommunizieren
- Modellieren
- Argumentieren
- Problemlösen
- Darstellen
- Fragen

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren

(nach von der Bank, 2013, S. 103; Lambert, 2012)

Produkte der semantischen Ebene zur **Bedeutung** des Lerngegenstands und hilfreiche Theorien/Quellen:

- Darstellung der historischen, gesellschaftlichen und schulischen Bedeutung des Lerngegenstands
  - Bildungsstandards & Fundamentale Ideen
  - intensive Literaturrecherche zum Lerngegenstand
- Darstellung der Bezüge zu früheren und späteren Lerngegenständen
  - Fachsystematik
  - Rahmenlehrplan & Schulbücher

- **Welche** (mathematisch-gesellschaftliche) **Bedeutung** liegt hinter dem Lerngegenstand (vgl. *Fundamentale Ideen*)?
- **Welcher Sinn** soll bei den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich des Lerngegenstands entwickelt werden und **welche Repräsentationen** sind dafür geeignet (vgl. *Grundvorstellungen*)?
- Wie **verhalten** sich Sinn und Bedeutung des Lerngegenstands **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?

- **Welche** (mathematisch-gesellschaftliche) **Bedeutung** liegt hinter dem Lerngegenstand (vgl. *Fundamentale Ideen*)?
- **Welcher Sinn** soll bei den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich des Lerngegenstands entwickelt werden und **welche Repräsentationen** sind dafür geeignet (vgl. *Grundvorstellungen*)?
- Wie **verhalten** sich Sinn und Bedeutung des Lerngegenstands **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?

Grundvorstellungen

Handlungserfahrung

primär

sekundär

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Grundvorstellungen zu …

- **Welche** (mathematisch-gesellschaftliche) **Bedeutung** liegt hinter dem Lerngegenstand (vgl. *Fundamentale Ideen*)?
- **Welcher Sinn** soll bei den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich des Lerngegenstands entwickelt werden und **welche Repräsentationen** sind dafür geeignet (vgl. *Grundvorstellungen*)?
- Wie **verhalten** sich Sinn und Bedeutung des Lerngegenstands **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?

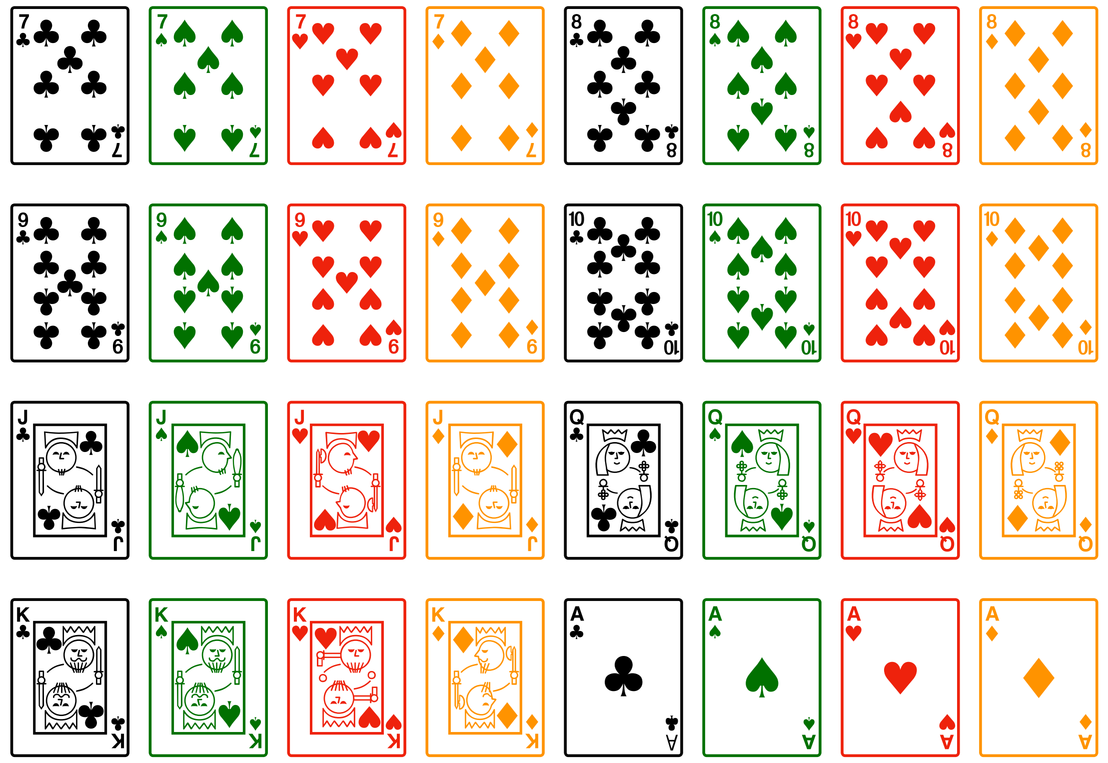
Grundvorstellungen

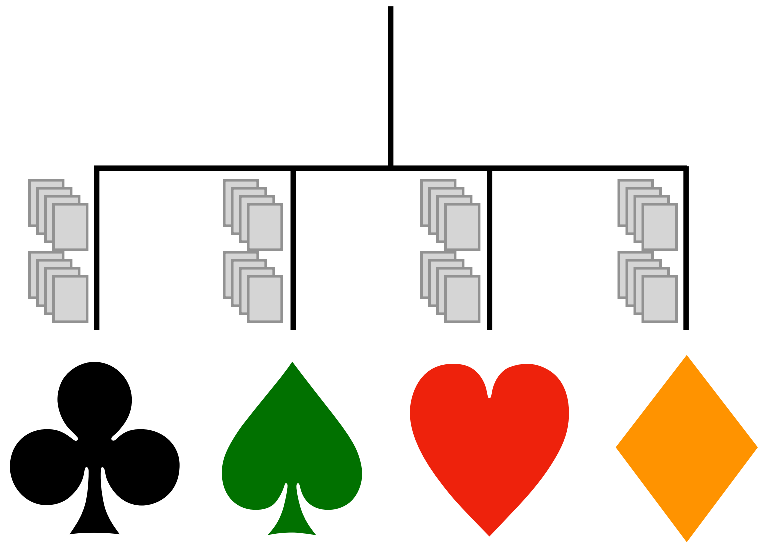
Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

normativ





Würfelwurf

Glücksrad

Laplace-Experimente

Wahrscheinlichkeit
als relativer Anteil

Grundvorstellungen

Die **Grundvorstellungsidee** beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und** dem Phänomen der **individuellen Begriffsbildung**.

In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch **Anknüpfung an** bekannte **Sach- oder Handlungszusammenhänge** bzw. **Handlungsvorstellungen**,
- Aufbau entsprechender (visueller) **Repräsentationen bzw. »Verinnerlichungen«**, die **operatives Handeln** auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch **Erkennen der** entsprechenden **Struktur in Sachzusammenhängen** oder durch Modellieren des Sachproblems **mit Hilfe der mathematischen Struktur**.

normativ

(vom Hofe, 1995, S. 97 f.)

Grundvorstellungen

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

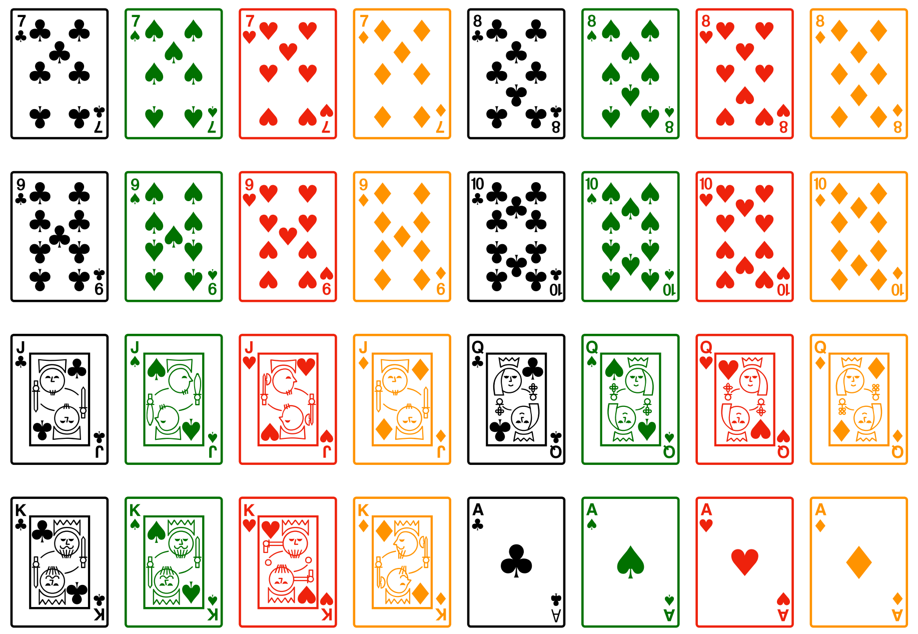
normativ

primär

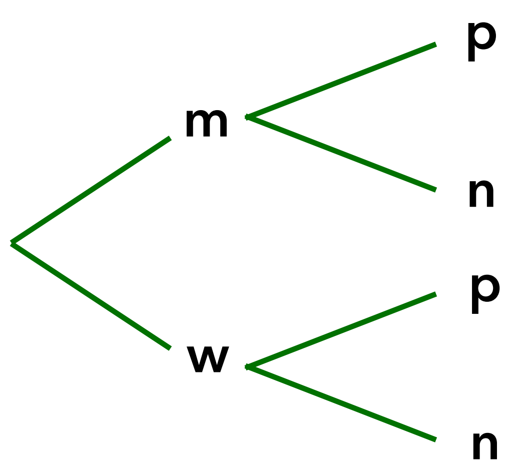
sekundär

(vom Hofe, 2014)

Wahrscheinlichkeit



Bedingte Wahrscheinlichkeit



	m	w	
p	50	20	**70**
n	280	300	**580**
	330	**320**	**650**

https://www.stat.auckland.ac.nz/~vt/

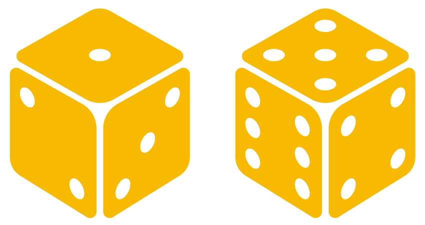
Grundvorstellungen

normativ	deskriptiv	konstruktiv
»Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des Lehrenden adäquat?«	»Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schülers erkennen?«	»Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben?«
Wahrscheinlichkeit als	**Wahrscheinlichkeit als »mitdenkende« Eigenschaft**	Analyse der »Bezugsmenge«

relativer Anteil

relative Häufigkeit

subjektives Vertrauen



(vom Hofe, 1995, S. 106 f.)

Grundvorstellungen

normativ
deskriptiv
konstruktiv

	Spezifizieren	Strukturieren
semantische Ebene	- **Welche** (mathematisch-gesellschaftliche) **Bedeutung** liegt hinter dem Lerngegenstand (vgl. *Fundamentale Ideen*)? - **Welcher Sinn** soll bei den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich des Lerngegenstands entwickelt werden und **welche Repräsentationen** sind dafür geeignet (vgl. *Grundvorstellungen*)?	- Wie **verhalten** sich Sinn und Bedeutung des Lerngegenstands **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Grundvorstellungen

	Spezifizieren	Strukturieren
empirische Ebene	- **Welche** typischen **individuellen Voraussetzungen** (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, …) sind zu erwarten und **wie passen** diese zum **angestrebten Verständnis**? - **Woher** kommen typische **Hindernisse** oder **unerwünschte Vorstellungen**?	- Wie können typische **Vorkenntnisse und Vorstellungen** als **fruchtbare Anknüpfungspunkte** dienen? - Welche **Schlüsselstellen** (Hindernisse, Wendepunkte, …) gibt es **im Lernweg** der Schüler/-innen?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen zu …

Die **Grundvorstellungsidee** beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und** dem Phänomen der **individuellen Begriffsbildung**.

(vom Hofe, 1995, S. 97 f.)

Begriffe | **Zusammenhänge** | **Verfahren**

Objekte

nat. Zahlen

Operationen

addieren, dividieren

Handlungserfahrung

primär | sekundär

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Grundvorstellungen

Grundvorstellungen zu …

Handlungserfahrung

primär | sekundär

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Wahrscheinlichkeit

- als relativer Anteil
  »theoretische Wahrscheinlichkeit«
- als relative Häufigkeit
  »frequentistische Wahrscheinlichkeit«
- als subjektives Vertrauen
  »subjektivistische Wahrscheinlichkeit«

Wahrscheinlichkeiten bestimmen

Wahrscheinlichkeit eines mehrstufigen Zufallsexperiments ermitteln

(Malle & Malle, 2003; Krüger et al., 2015, S. 234 ff.)

Grundvorstellungen

Aspekte vs. Grundvorst.

»Ein *Aspekt* eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.«

»Eine *Grundvorstellung* zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.«

Ordinalzahlaspekt (charaktersisiert über Peano-Axiome)	Natürliche Zahl als Position in einer Reihung, Addition als Weiterzählen
Kardinalzahlaspekt (charakerisiert über Äquivalenzklassen gleichmächtiger Mengen)	Natürliche Zahl als Anzahl der Elemente einer Menge, Addition als Zusammenfügen

(Greefrath et al., 2016, S. 17)

Handlungserfahrung

primär | sekundär

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Grundvorstellungen zu …

Produkte der semantischen Ebene zum **Sinn** des Lerngegenstands und hilfreiche Theorien/Quellen:

- Diskussion zu ausgewählten Grundvorstellungen zu den im Lernbereich auftretenden Begriffen
  - »Didaktik der …«, mathematik lehren, …
  - (selbst Grundvorstellungen entwickeln)
- Diskussion zu Repräsentationen und Arbeitsmitteln zum Lerngegenstand

- **Welche** (mathematisch-gesellschaftliche) **Bedeutung** liegt hinter dem Lerngegenstand (vgl. *Fundamentale Ideen*)?
- **Welcher Sinn** soll bei den Schülerinnen und Schülern hinsichtlich des Lerngegenstands entwickelt werden und **welche Repräsentationen** sind dafür geeignet (vgl. *Grundvorstellungen*)?
- Wie **verhalten** sich Sinn und Bedeutung des Lerngegenstands **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?

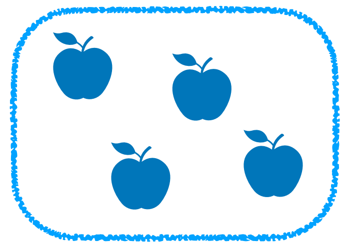
Ganze Zahlen

Typische Schwierigkeiten

- Vielfältige Interpretation des Minus-Zeichens: Vor-, Rechen- und Inversionszeichen

$-5+2$ $7-3$ $-a$

- Kardinalzahlaspekt nicht mehr tragfähig, Ordinalzahlaspekt eingeschränkt tragfähig, Maßzahlaspekt im Prinzip erweiterbar



1. → 2. → 3. → 4.

- Fehlinterpretation der Ordnungsrelation (nicht mehr über Mächtigkeit möglich; fehlerhafte spiegelbildliche Interpretation)

$-5 > -3$

Normative (Grund-)Vorstellungen

Negative Zahlen als

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen

(vom Hofe & Hattermann, 2014)

Ganze Zahlen

Anwendung auf Realität

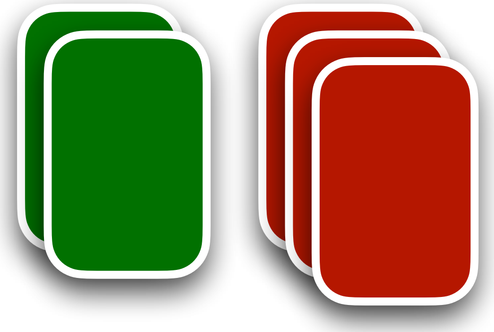
Normative (Grund-)Vorstellungen

Negative Zahlen als

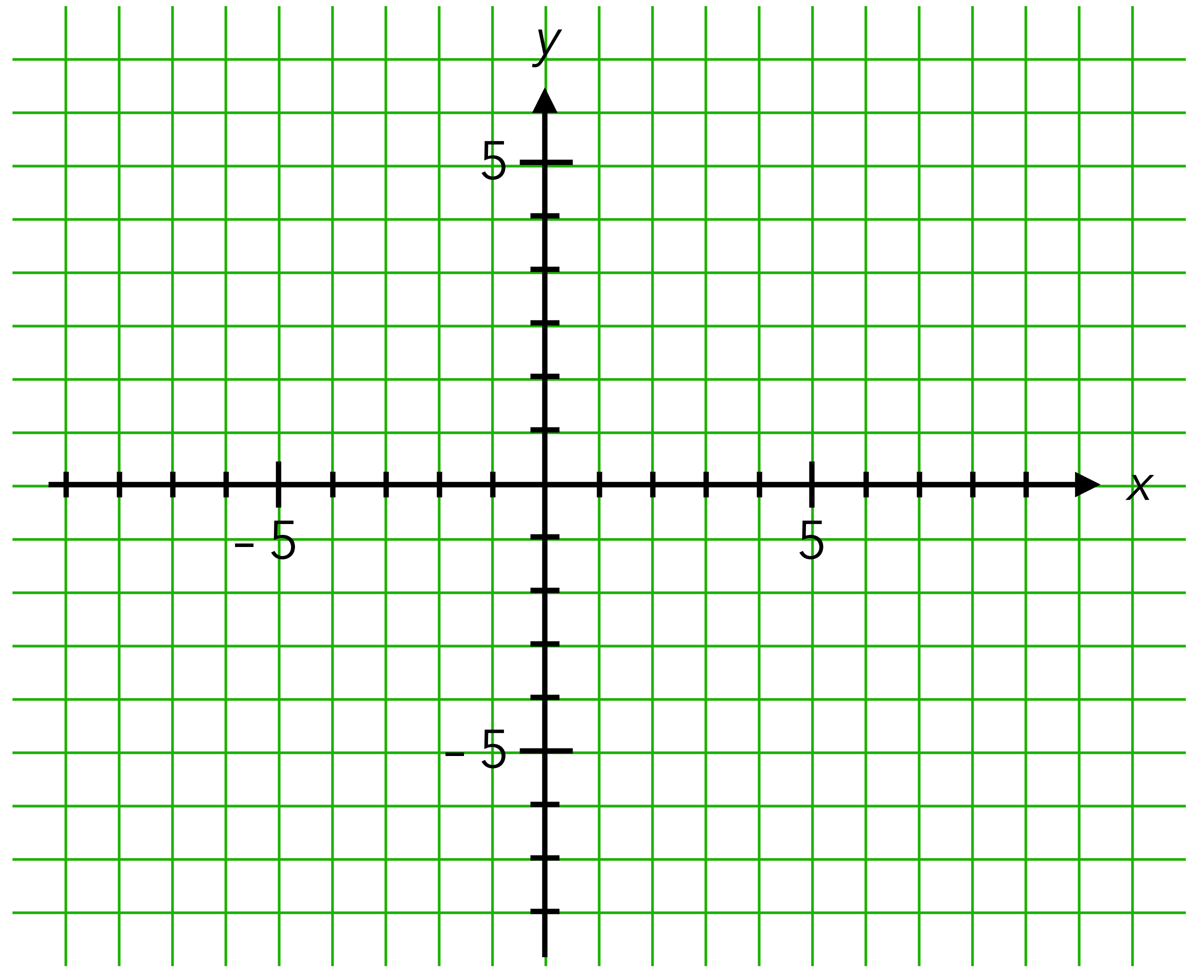
- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen

Guthaben: 5 €
Schulden: – 5 €

$|-5| = 5$



Eckhard Henkel, https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Außenthermometer?uselang=de#/media/File:2014-07-24_Außenthermometer_(2012)_von_Michael_Sailstorfer_IMG_5656.jpg, CC BY-SA 3.0 DE



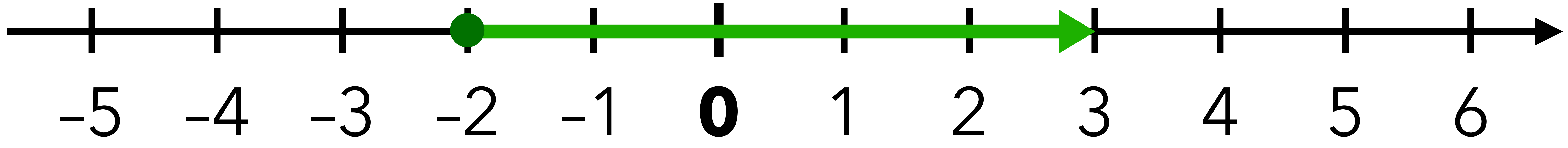
	Kontobewegung	Kontostand
		50,00 €
Taschengeld von Oma	5,00 €	55,00 €
Kinoeintritt	-8,00 €	47,00 €
Popcorn	-3,00 €	44,00 €
		44,00 €

Ganze Zahlen

Normative (Grund-)Vorstellungen

Negative Zahlen als

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen



Addieren/Subtrahieren als

- Pfeilanlegen
- gerichtetes Weiter-/Zurückzählen
- Subtraktion/Addition der Gegenzahl

Multiplizieren als

- Strecken/Stauchen des Pfeils (pos. Zahl)
- Spiegeln an der Null (–1)
- Kombination aus beidem

Größenvergleich als

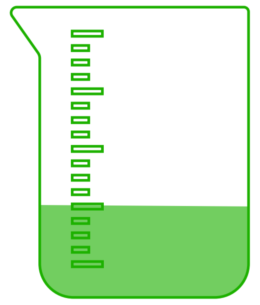
- direkter Lagevergleich auf Zahlengeraden (links < rechts)
- Lage- und Betragsvergleich (neg. < pos. & betragsabhängig)

(vom Hofe & Hattermann, 2014, S. 4)

Brüche

Bruch als **Anteil eines Ganzen** oder **mehrerer Ganzer**

Bruch als **Maßzahl**



Bruch als **Operator**

$\frac{1}{5}$ von 250 €

Bruch als **Verhältnis**

2 von 3 Personen tragen eine Maske.

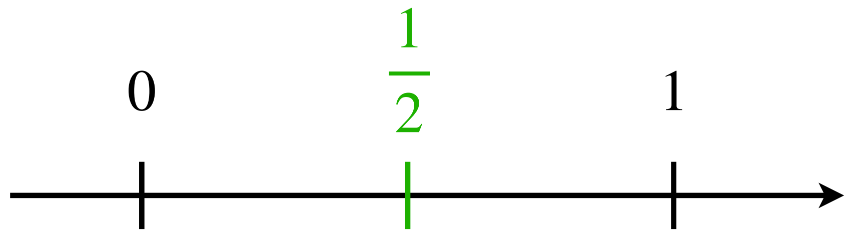
Bruch als **Quotient**

$$3 : 5 = \frac{3}{5}$$

Bruch als **Lösung einer linearen Gleichung**

$$5x = 3$$

Bruch als **Skalenwert**



Quasikardinale Auffassung von Brüchen

$\frac{3}{5}$ als 3 mal $\frac{1}{5}$

(Padberg & Wartha, 2017, S. 19 ff.)

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

Brüche

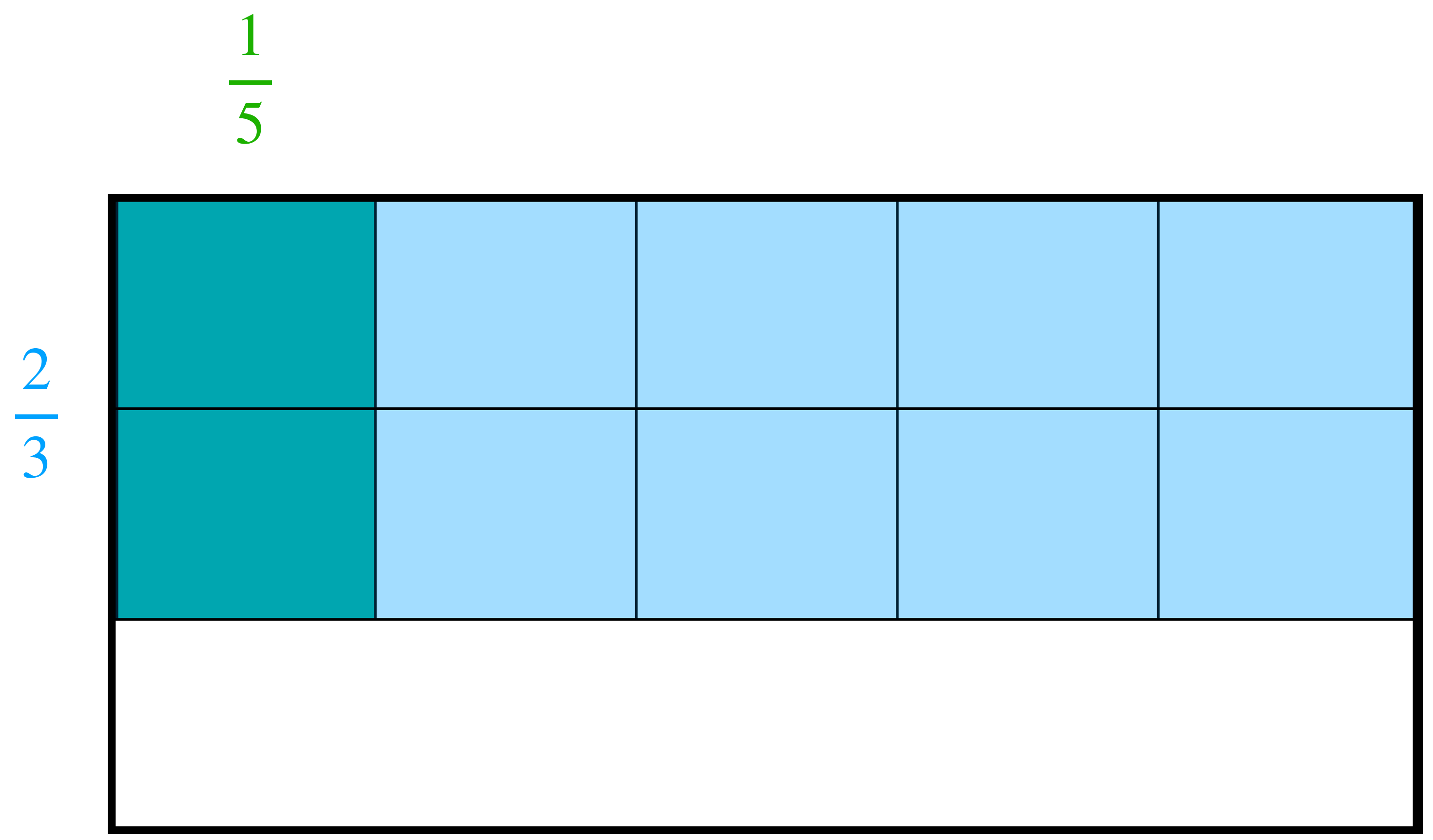
$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

Anteil eines Anteils

$$\frac{1}{5} \text{ von } \frac{2}{3}$$

$3 \cdot \frac{1}{5}$	Quasikardinale Auffassung
$\frac{1}{5} \cdot 3$	Kommutativität; Verknüpfung Anteil eines Ganzen und Anteil mehrerer Ganzer
$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$	Verallgemeinerung (leider oft nur auf Kalkül-Ebene)

Flächeninhalt



(Padberg & Wartha, 2017, S. 108 ff.)

Literatur

von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83–124). Franzbecker. https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2012.pdf

Brückler, F. M. (2018). *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3

Bruner, J. S. (1976). Die Bedeutung der Struktur im Lernprozeß. In A. Holtmann (Hrsg.), *Das sozialwissenschaftliche Curriculum in der Schule: Neue Formen und Inhalte* (S. 77–90). VS Verlag für Sozialwissenschaften. https://doi.org/10.1007/978-3-322-85275-5

Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. *Didaktik der Mathematik*, *16*(2), 149–160.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In Technische Universität Dortmund (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz*. WTM. https://doi.org/10.17877/DE290R-8808

Literatur

Hattermann, M., & vom Hofe, R. (Hrsg.). (2014). *mathematik lehren 183: Zugänge zu negativen Zahlen*. Friedrich Verlag.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3

Lambert, A. (2012). *Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-)unterricht* [Vortrag]. Eingangsstatement zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken. https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/einrichtung/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_für_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf

Malle, G., & Malle, S. (2003). Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *Mathematik lehren*, 118, 52–56.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0

Literatur

Schwill, A. (1994). *Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik*. Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik, Wolfenbüttel. http://www.informatikdidaktik.de/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6