Universität Potsdam – Wintersemester 2024/25

# Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 11 – Didaktik der Geometrie

# Stoffdidaktik Mathematik

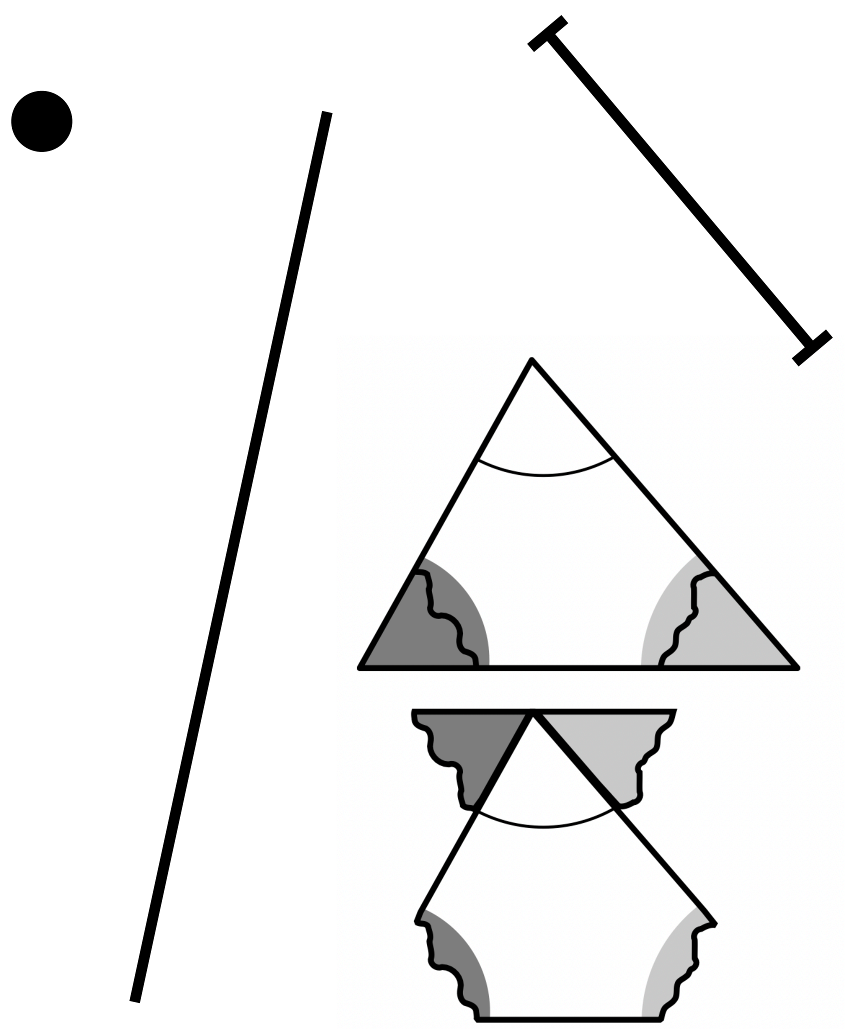
Kapitel 11 – Didaktik der Geometrie

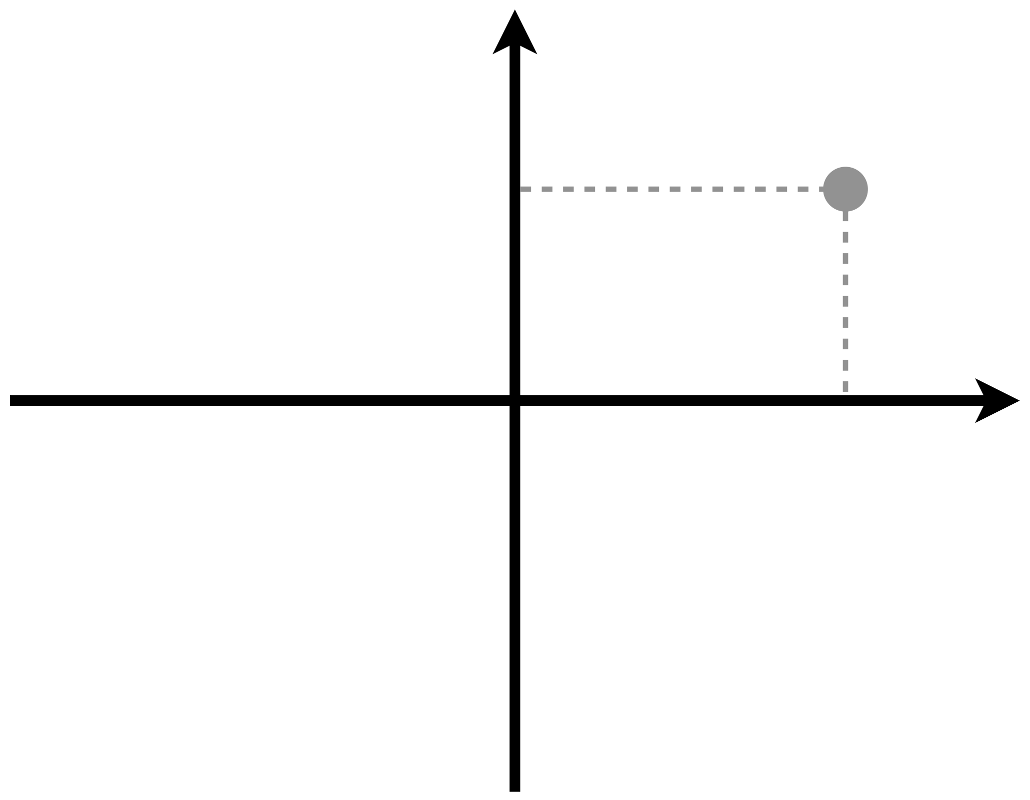
- Sie sind sich der Verbindungen von Geometrie, Linearer Algebra und Analytischer Geometrie bewusst.
- Sie kennen enaktive, ikonische und symbolische Herangehensweisen zur Behandlung von Lagebeziehungen.
- Sie kennen Besonderheiten im Einsatz von DGS bei der Behandlung geometrischer Fragestellungen (wie Zugstabilität, Spuren und Ortslinien).

# Geometrie

**Elementar-geometrie** → **Koordinatisierung** → **Analytische Geometrie**

Vektor als Verschiebung



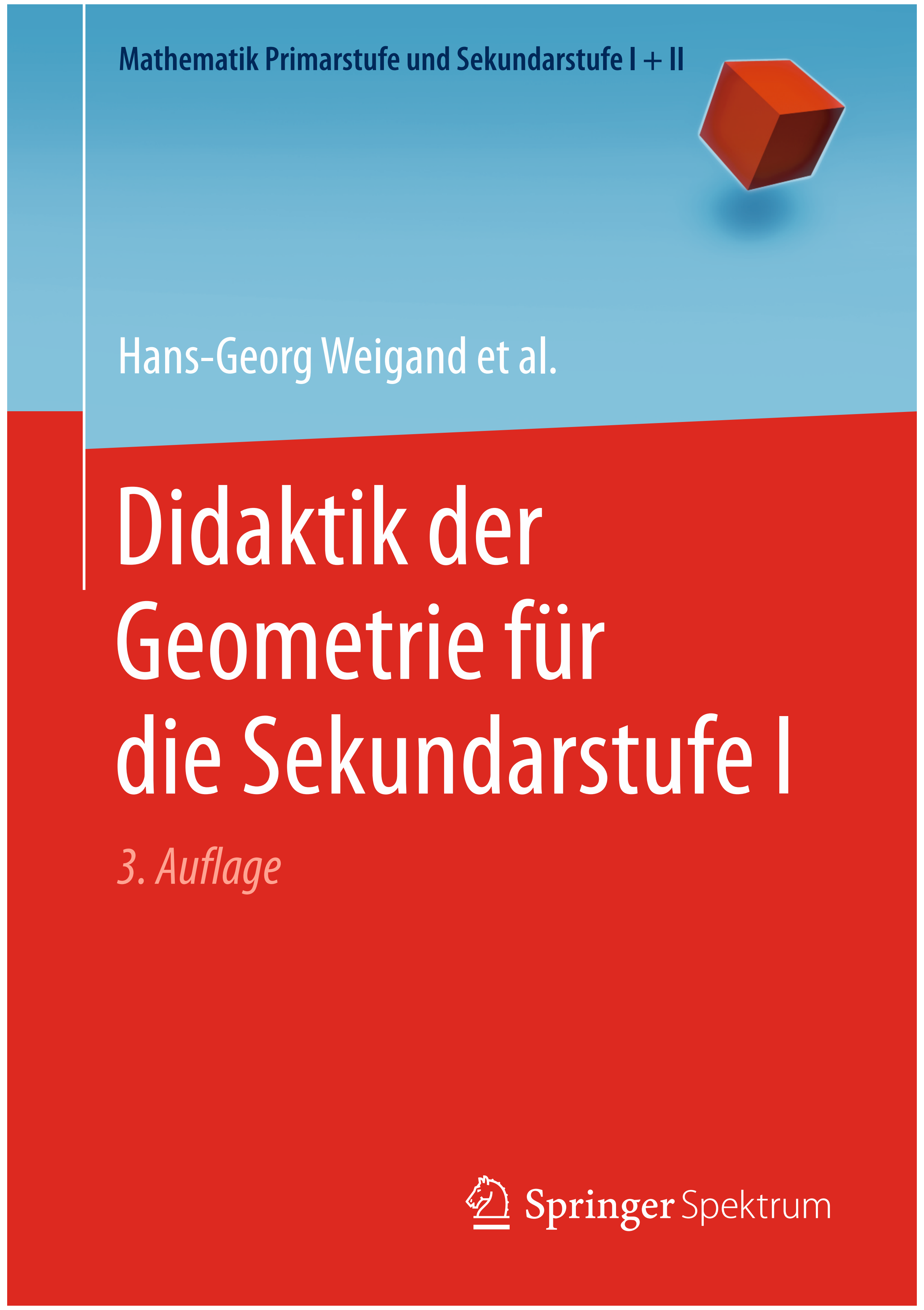


**Lineare Algebra** → **Analytische Geometrie**

Vektor als n-Tupel

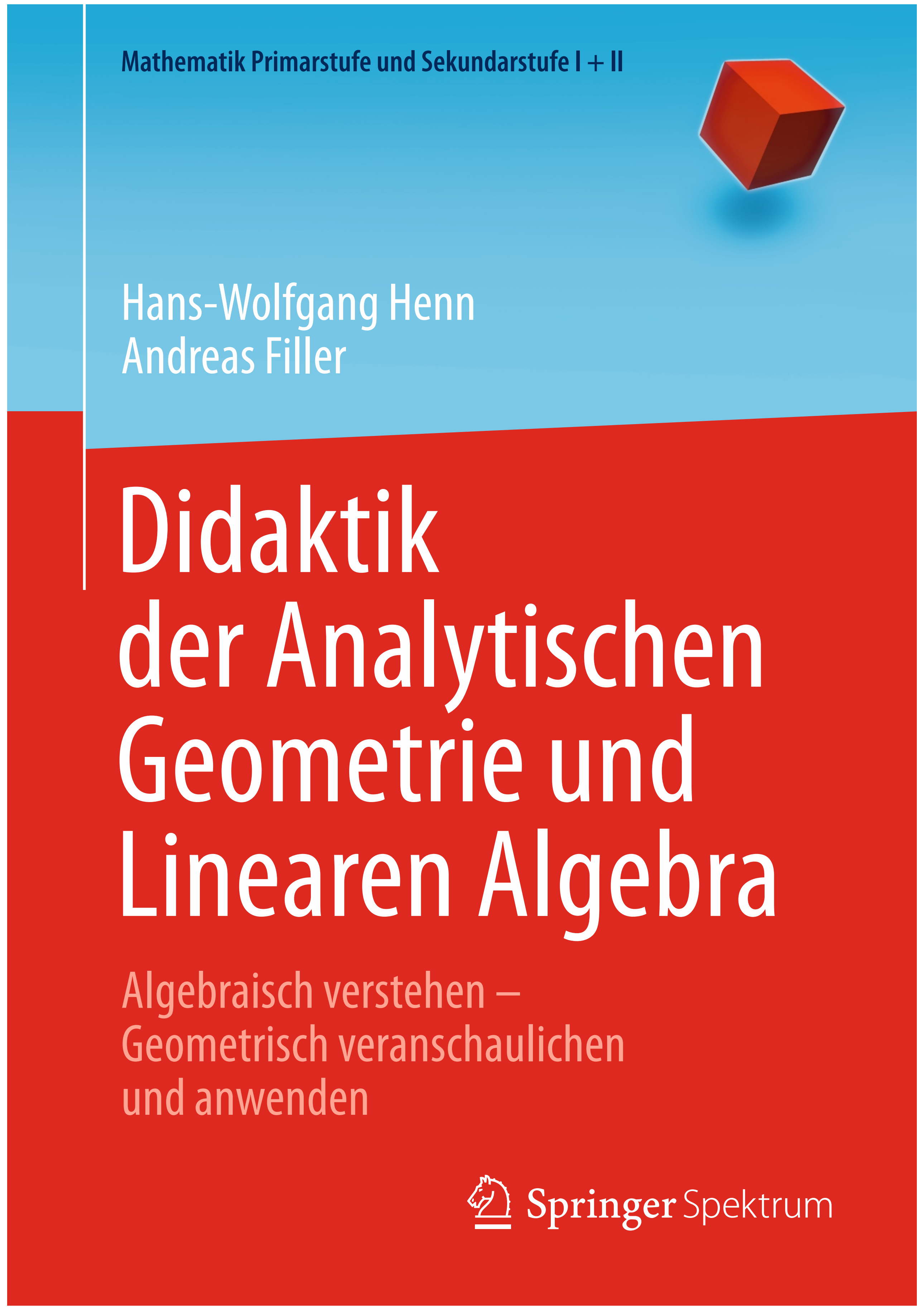
Vektor als Element eines Vektorraumes

# Geometrie




1. Ziele des Geometrieunterrichts
2. **Beweisen und Argumentieren**
3. **Konstruieren**
4. **Problemlösen**
5. **Begriffslernen und Begriffslehren**
6. Ebene Figuren und Körper
7. Flächeninhalt und Volumen
8. Symmetrie und Kongruenz
9. Ähnlichkeit
10. Trigonometrie
11. Geometrie und Geometrieunterricht

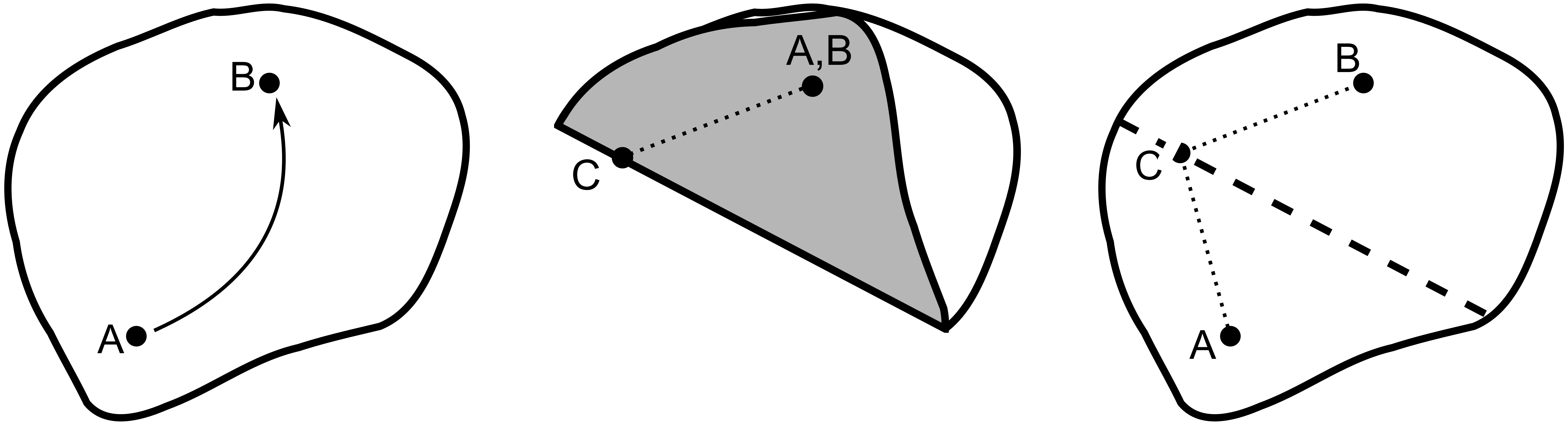
(Weigand et al., 2018)




1. **Einführung: Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Allgemeinbildung**
2. Lineare Gleichungssysteme
3. Der Vektorbegriff
4. Analytische Geometrie
5. Vertiefungen und Anwendungen der Analytischen Geometrie
6. Matrizen und affine Abbildungen
7. Ausblick

(Henn & Filler, 2015)

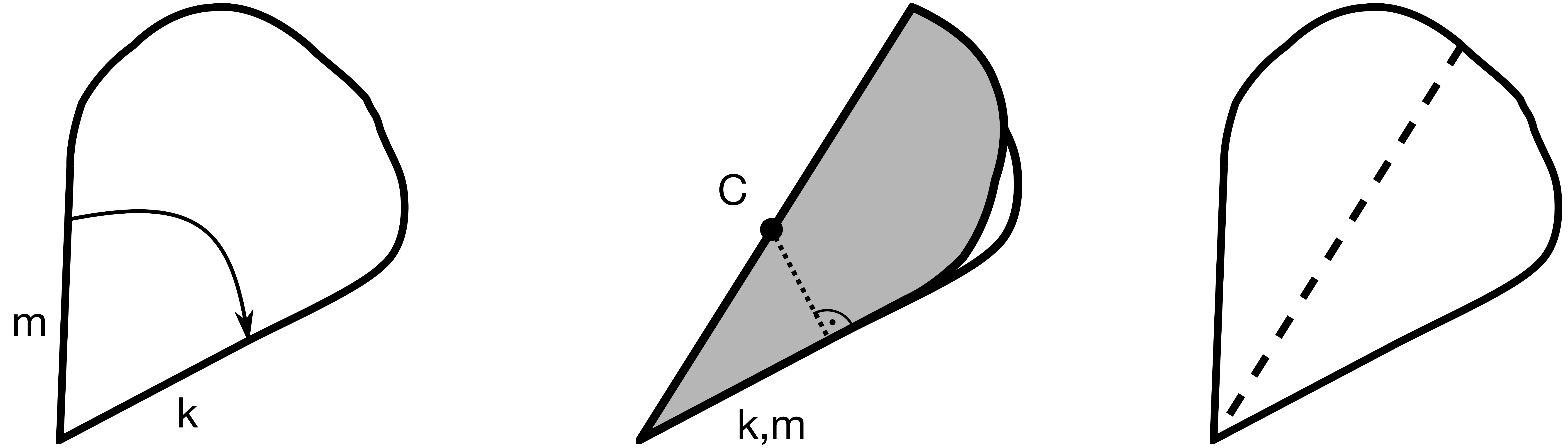
# Lagebeziehungen




Mittelsenkrechte als Menge aller Punkte, die von zwei Punkten denselben Abstand haben

(Etzold & Petzschler, 2014, S. 5)

# Lagebeziehungen

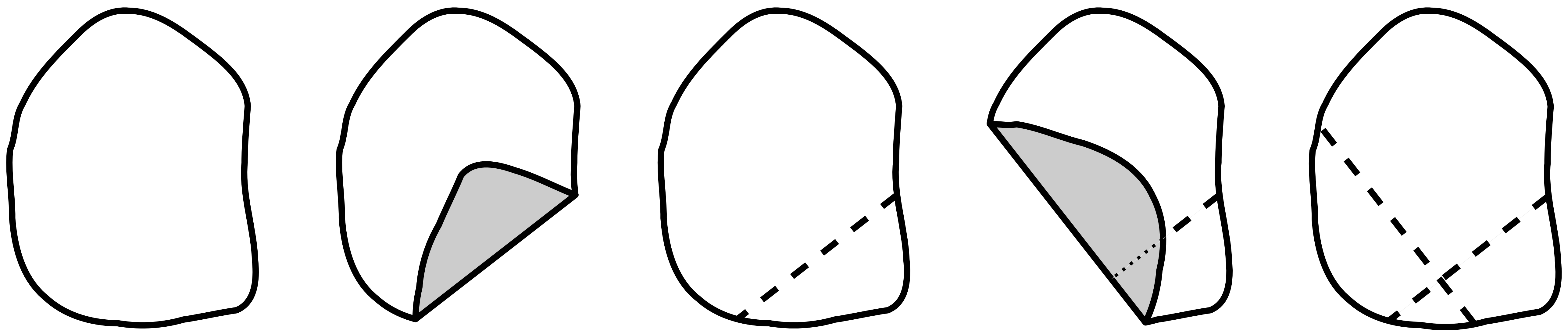



Winkelhalbierende als Menge aller Punkte, die von zwei Geraden denselben Abstand haben.

(Etzold & Petzschler, 2014, S. 5)

# Lagebeziehungen

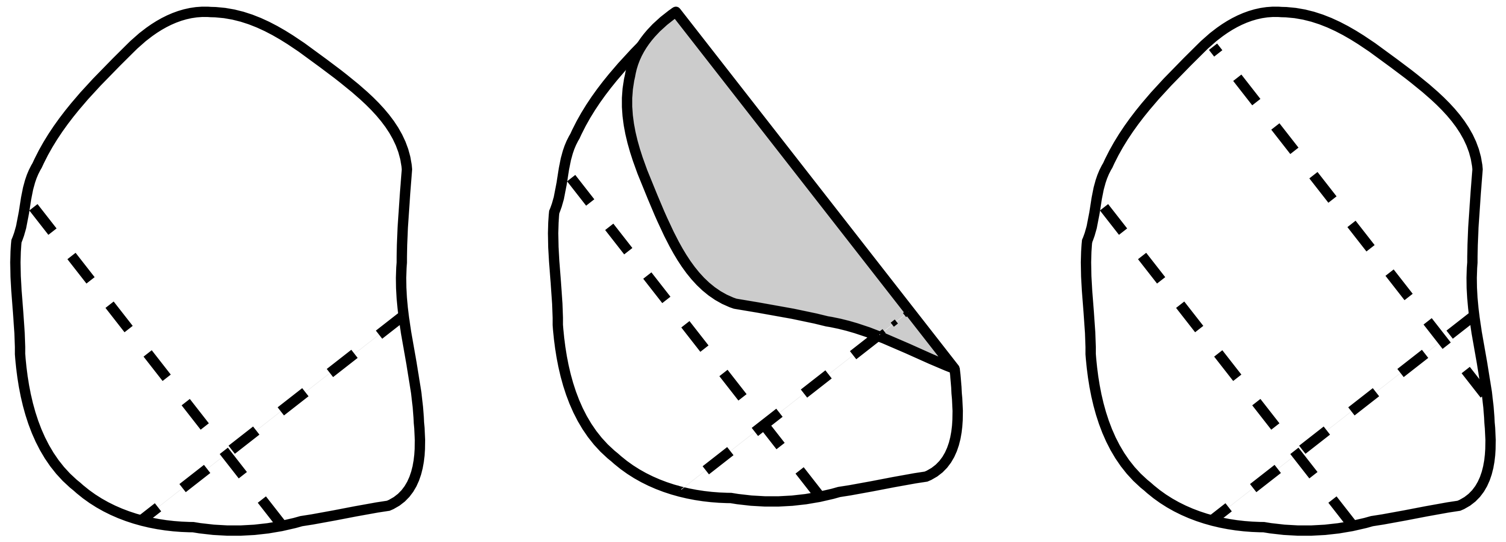
So werden zueinander senkrechte Linien gefaltet



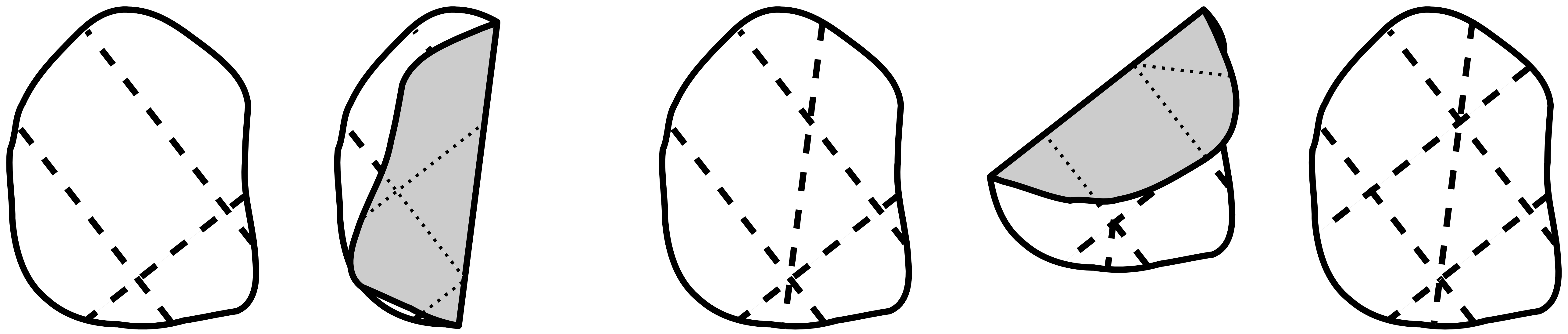
## Erinnerung an die Theorie

- **Lernhandlung:** *Erkennen* (als mehrfaches *Identifizieren* und *Realisieren*) der geometrischen Konfiguration der Faltung
- **Analyse der Lernhandlung** unterstützt Aneignung geometrischen Wissens

So werden zueinander parallele Linien gefaltet
Sie entstehen als Senkrechte der Senkrechten (s. o.):



Und so wird ein Quadrat gefaltet

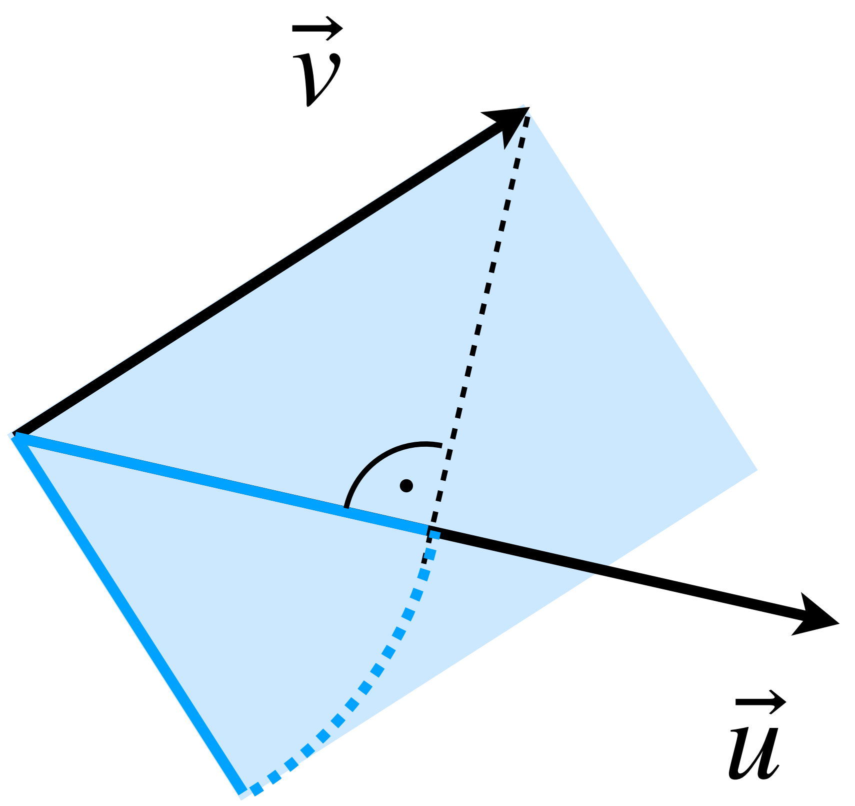


(Etzold & Petzschler, 2014, S. 10)

# Lagebeziehungen

## Skalarprodukt

### geometrischer Zugang




$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\left(\angle(\vec{u}, \vec{v})\right)$$

### arithmetischer Zugang

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

### axiomatischer Zugang

positiv definite
symmetrische
Bilenearform

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \geq 0 \quad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \mathbf{0}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

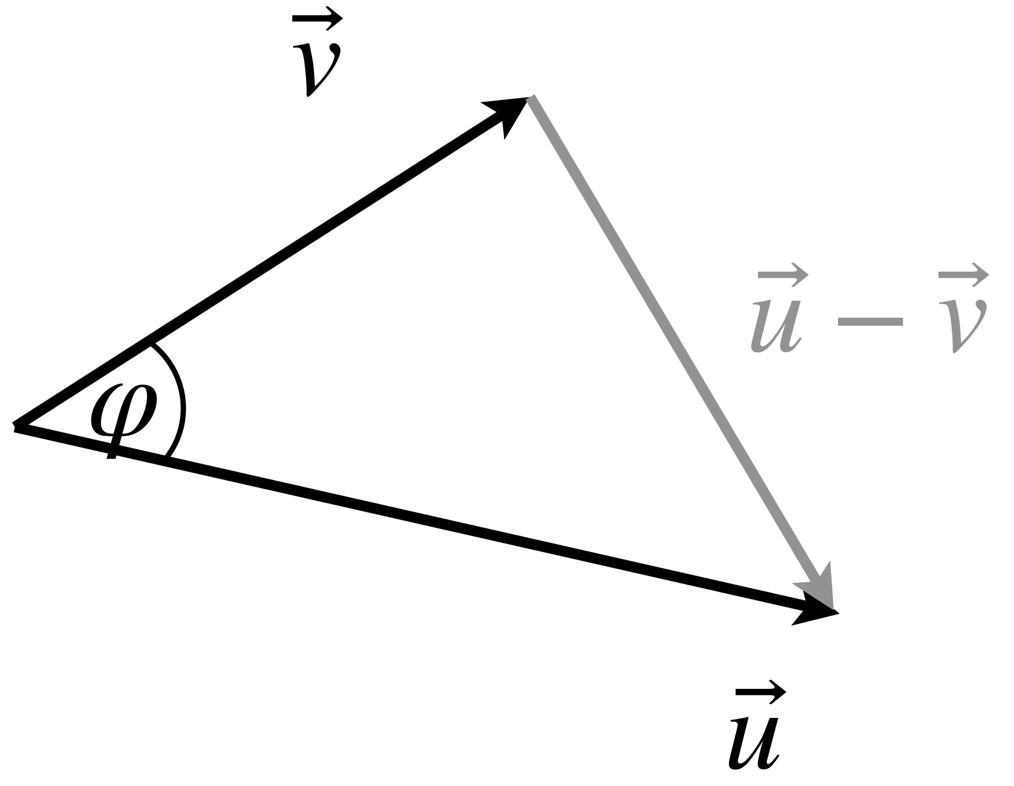
(Henn & Filler, 2015, 195 ff.)

# Lagebeziehungen

## Skalarprodukt

geometrischer Zugang

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$




$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + \ldots + u_n^2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sum (u_i^2 - 2u_i v_i + v_i^2) = \sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sum u_i v_i = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\sum u_i v_i}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

(Henn & Filler, 2015, 195 ff.)

# Lagebeziehungen

## Skalarprodukt

Schreibweisen

$$\left\langle \vec{u}, \overrightarrow{w} \right\rangle$$

$$\vec{u} \circ \overrightarrow{w}$$

$$\vec{u} \bullet \overrightarrow{w}$$

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{w}$$

# DGS-Einsatz

## Dynamische Geometrie-Software

Tipp!

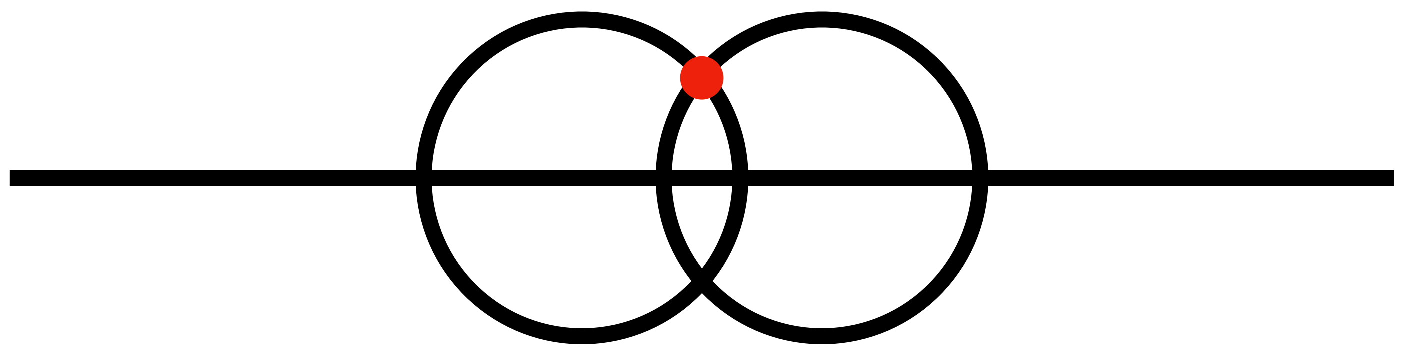
Euclidea

### Zugstabilität

Figur (z. B. Parallelogramm) behält ihre Eigenschaften (Parallelität gegenüberliegender Seiten) auch dann, wenn einzelne Eckpunkte verschoben werden.

(vgl. Kortenkamp & Dohrmann, 2016)

### deterministisches vs. kontinuierliches Verhalten

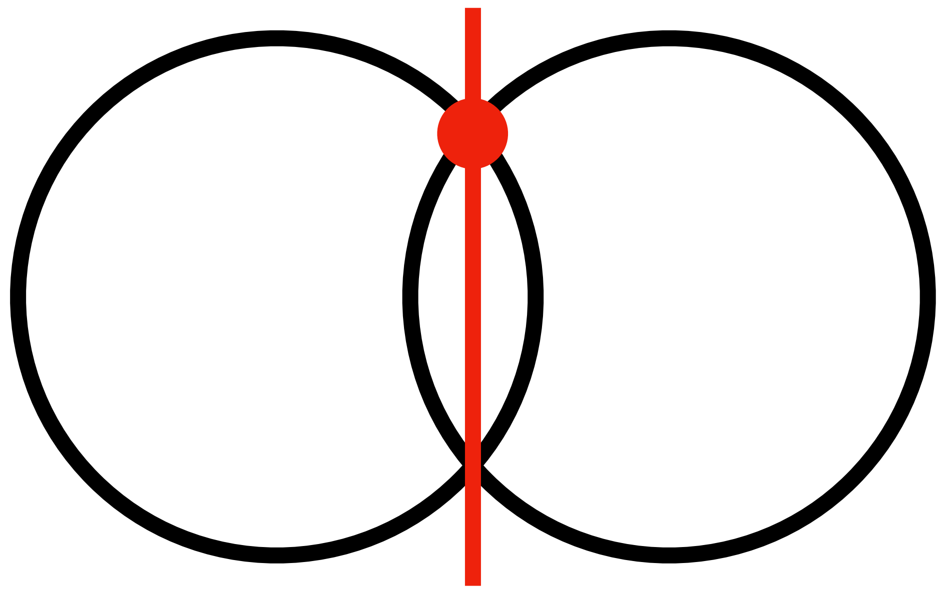


deterministisch: GeoGebra

kontinuierlich: Cinderella

(vgl. Labs, 2008, S. 57 ff.; Kortenkamp, 1999, S. 84 ff.)

### Spuren und Ortslinien



Ortslinien als Menge aller Punkte, die eine bestimmte Eigenschaft erfüllen

# Literatur


Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 7, Berlin/Brandenburg* (1. Auflage). C.C. Buchner.

Etzold, H., & Petzschler, I. (2014). *Mathe verstehen durch Papierfalten*. Verlag an der Ruhr.

*Euclidea* [Software]. https://www.euclidea.xyz

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2

Kortenkamp, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry* [Dissertation, ETH Zurich]. https://doi.org/10.3929/ETHZ-A-003876663

Kortenkamp, U., & Dohrmann, C. (2016). Vorwärts-Rückwärts zum Begriff. Konstruktion und Re-Konstruktion von Zugfiguren. *mathematik lehren*, *196*, 18–21.

Labs, O. (2008). *Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen*. https://oliverlabs.net/data/0708_DynGeo.pdf

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8