Universität Potsdam – Wintersemester 2024/25

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 8 – Arbeitsmittel

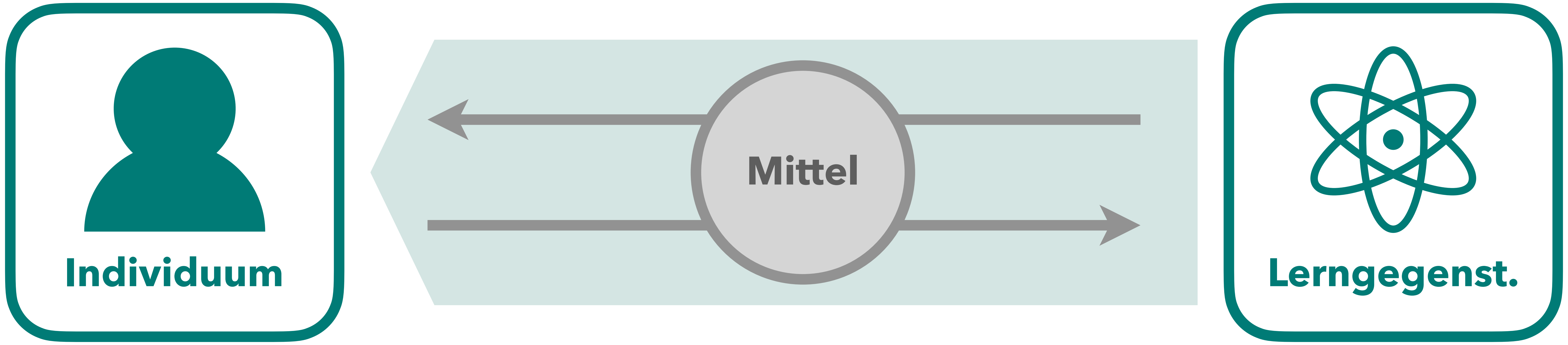
Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 8 – Arbeitsmittel

- Sie können Arbeitsmittel über Anschaulichkeit, Abstraktheit und Operierbarkeit charakterisieren.
- Sie kennen einen Ablauf zur Ausbildung von Grundvorstellungen mithilfe von Arbeitsmitteln. Dabei sind Sie sich der besonderen Bedeutung des Sprechens über Handlungen bewusst.
- Sie können lerntheoretisch den Einsatz von Arbeitsmitteln bei der Aneignung von Lerngegenständen über Internalisierungs- und Externalisierungsprozesse erläutern.

Bedeutsamkeit des Sprechens!

Aneignung als Einheit aus Internalisierung und Externalisierung



Ich will mich selbst (geistig) weiterentwickeln!

Dafür muss ich dieses und jenes tun.

Das und das steht mir dafür zur Verfügung.

Arbeitsmittel

abstrakt

enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

anschaulich

macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich

operierbar

ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

»Arbeitsmittel im Mathematikunterricht repräsentieren mathematische Objekte und erlauben Handlungen mit den dargestellten Objekten.«

(Reinhold et al., 2023, S. 525)

Grundvorstellungen

- Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen bzw. »Verinnerlichungen«, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,

[…]

(vom Hofe, 1995, S. 97 f.)

Lernmodelle

»sinnliche Stützen geistigen Handelns«, die die »abstrakte Struktur des Gegenstands zusammen mit dem prinzipiellen Weg abbilden, der zur Aufdeckung der Struktur geführt hat«

(Lompscher, 1996, S. 6)

Arbeitsmittel

Ein **Arbeitsmittel** ist eine **materielle oder materialisierte sowie** durch die Schülerinnen und Schüler **operierbare Repräsentation** eines Lerngegenstands. Damit muss ein Arbeitsmittel folgende Bedingungen erfüllen:

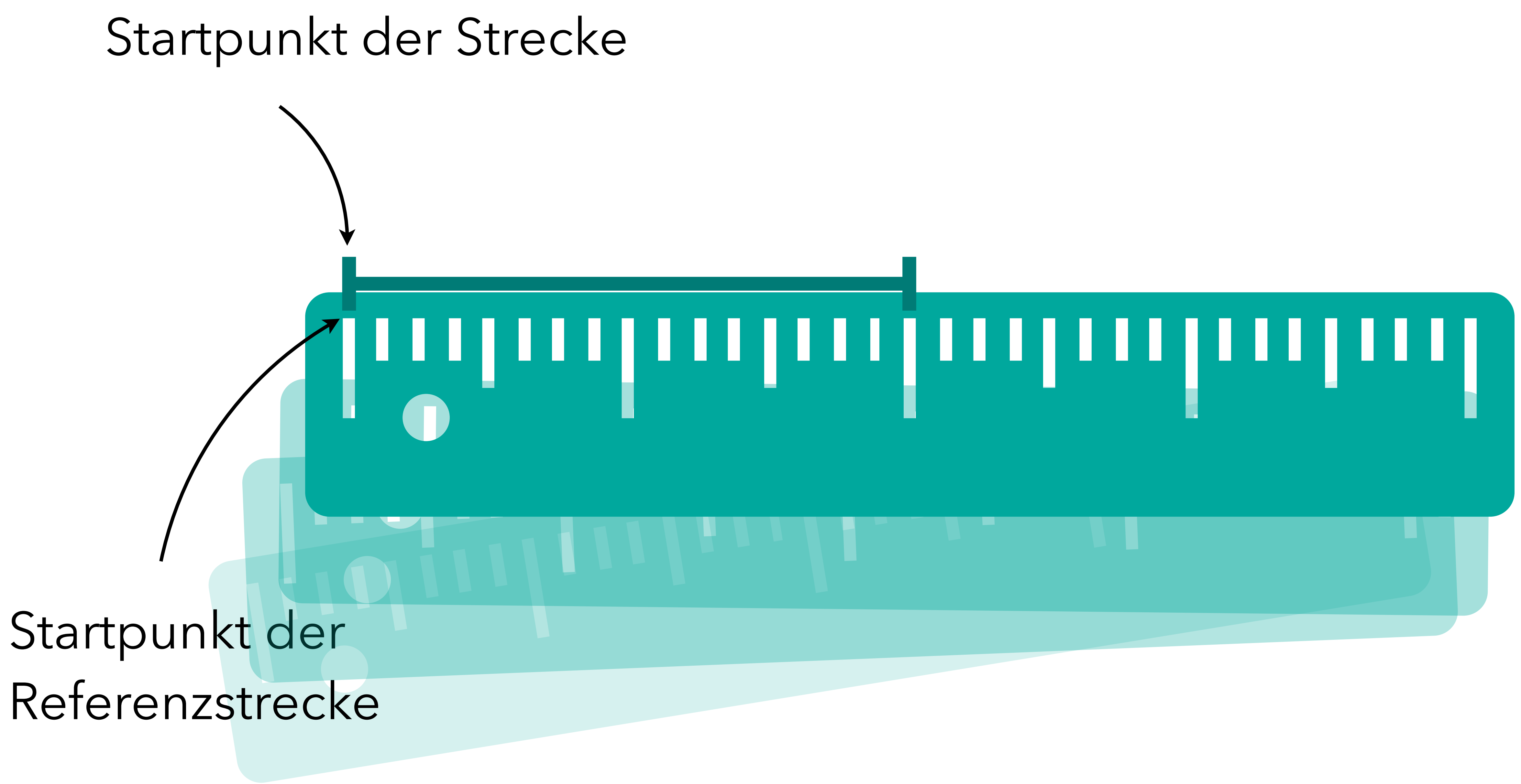
- Es enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen **(Abstraktheit)**.
- Es macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich **(Anschaulichkeit)**.
- Es ermöglicht, Lernhandlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind **(Operierbarkeit)**.

Arbeitsmittel

Beispiel: Längenmessung

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Messen einer Stecke als Vergleichen zu einer Referenzstrecke



Operationen:

- Startpunkte aufeinanderlegen
- Lineal an Strecke ausrichten
- Zahl ablesen

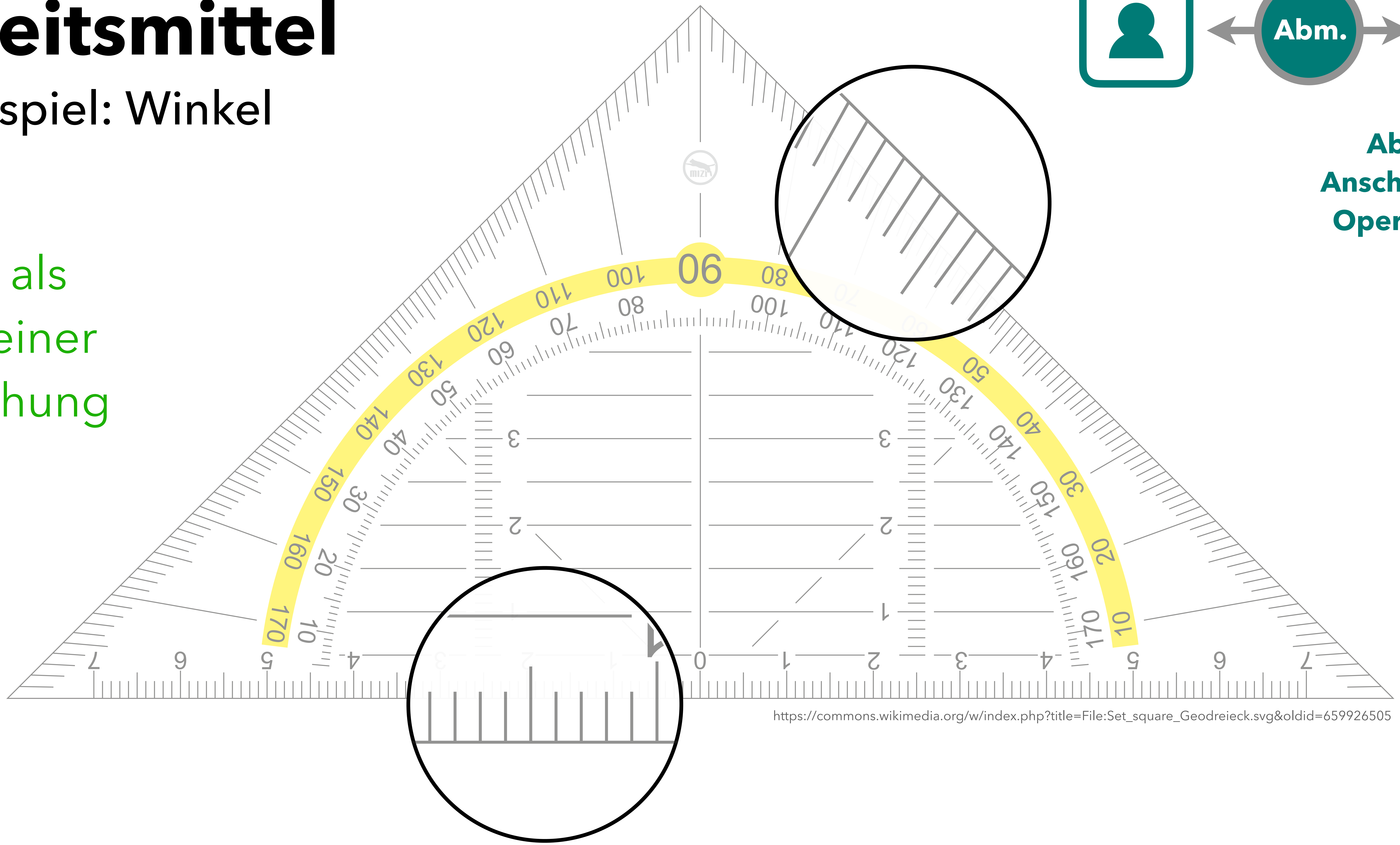
Arbeitsmittel

Beispiel: Winkel

Abm.

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Winkel als
Weite einer
Umdrehung



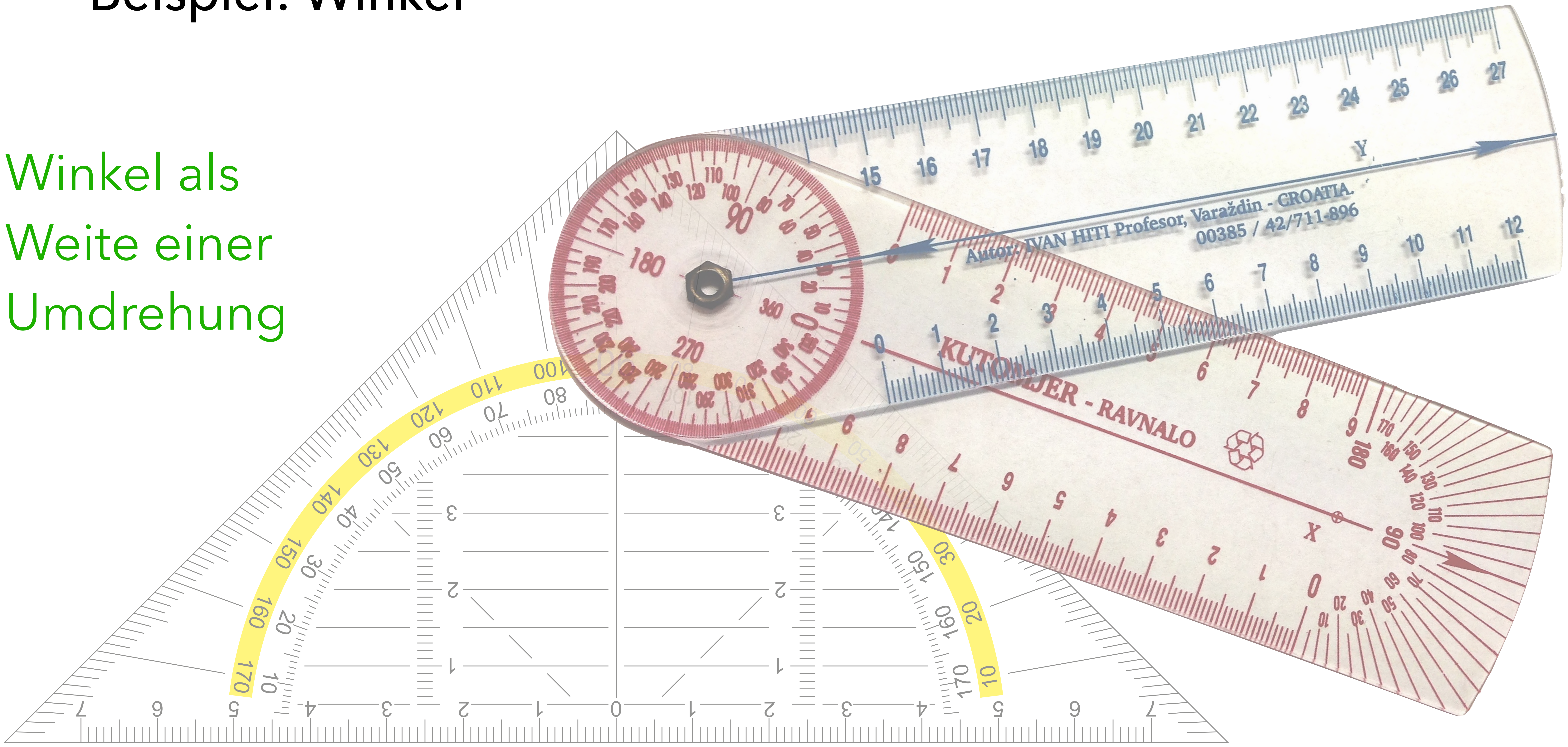
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Set_square_Geodreieck.svg&oldid=659926505

Arbeitsmittel

Beispiel: Winkel

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Winkel als Weite einer Umdrehung



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Set_square_Geodreieck.svg&oldid=659926505

Gleichungen

Objekt »Gleichung«

Lösen von Gleichungen

Operationale Grundvorstellung

Gleichung als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung

Gleichheitszeichen als »ergibt«-Zeichen

$2 + 3 = 5 \qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Relationale Grundvorstellung

Gleichung als Anlass, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten denselben Wert besitzen

Gleichheitszeichen als Relationszeichen, Variable als Unbekannte

$2x + 1 = 7$

Funktionale Grundvorstellung

Gl. als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Funktionstermen

Gleichheitszeichen als Relationszeichen, Variablen als Veränderliche

$x + 1 = -3x$

Objekt-Grundvorstellung

Gleichung als ein Objekt, das charakteristische Eigenschaften hat

$x^2 + y^2 = r^2$

(Weigand et al., 2022, S. 257 f.)

Gleichungen

→ Objekt »Gleichung«

→ **Lösen von Gleichungen**

Operationale Grundvorstellung
Gleichung als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung

$2 + 3 = 5$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

»Rückwärtsrechnen«

Relationale Grundvorstellung
Gleichung als Anlass, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten denselben Wert besitzen

$2x + 1 = 7$

Äquivalenzumformungen

Funktionale Grundvorstellung
Gl. als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Funktionstermen

$x + 1 = -3x$

Schnittpunkt suchen

Objekt-Grundvorstellung
Gleichung als ein Objekt, das charakteristische Eigenschaften hat

$x^2 + y^2 = r^2$

Koordinaten prüfen

(Weigand et al., 2022, S. 257 f.)

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Was ist eine Gleichung?

$2 + 3 = 8$ **Aussage**

$2x = 14$ **Aussageform**

$$T_1(x) = T_2(x)$$

Was ist die Lösung einer Gleichung?

$$\frac{7}{x} = 2$$

Grundmenge $\mathbb{G}$	$\mathbb{Z}$
Definitionsmenge $\mathbb{D}$	$\mathbb{Z}\backslash\{0\}$
Lösungsmenge $\mathbb{L}$	$\{\ \}$

Ein Wert $x_0 \in \mathbb{D}$ heißt Lösung einer Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$, wenn $T_1(x_0) = T_2(x_0)$ eine wahre Aussage ist. Die Menge aller Lösungen wird Lösungsmenge genannt. Sie ist eine Teilmenge der Definitionsmenge.

Was ist eine Äquivalenzumformung?

Jede Anwendung einer **injektiven Funktion** auf **beide Seiten einer Gleichung** verändert nicht die Lösungsmenge der Gleichung und wir daher als **Äquivalenzumformung** bezeichnet.

Lösungsmengenäquivalenz: Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

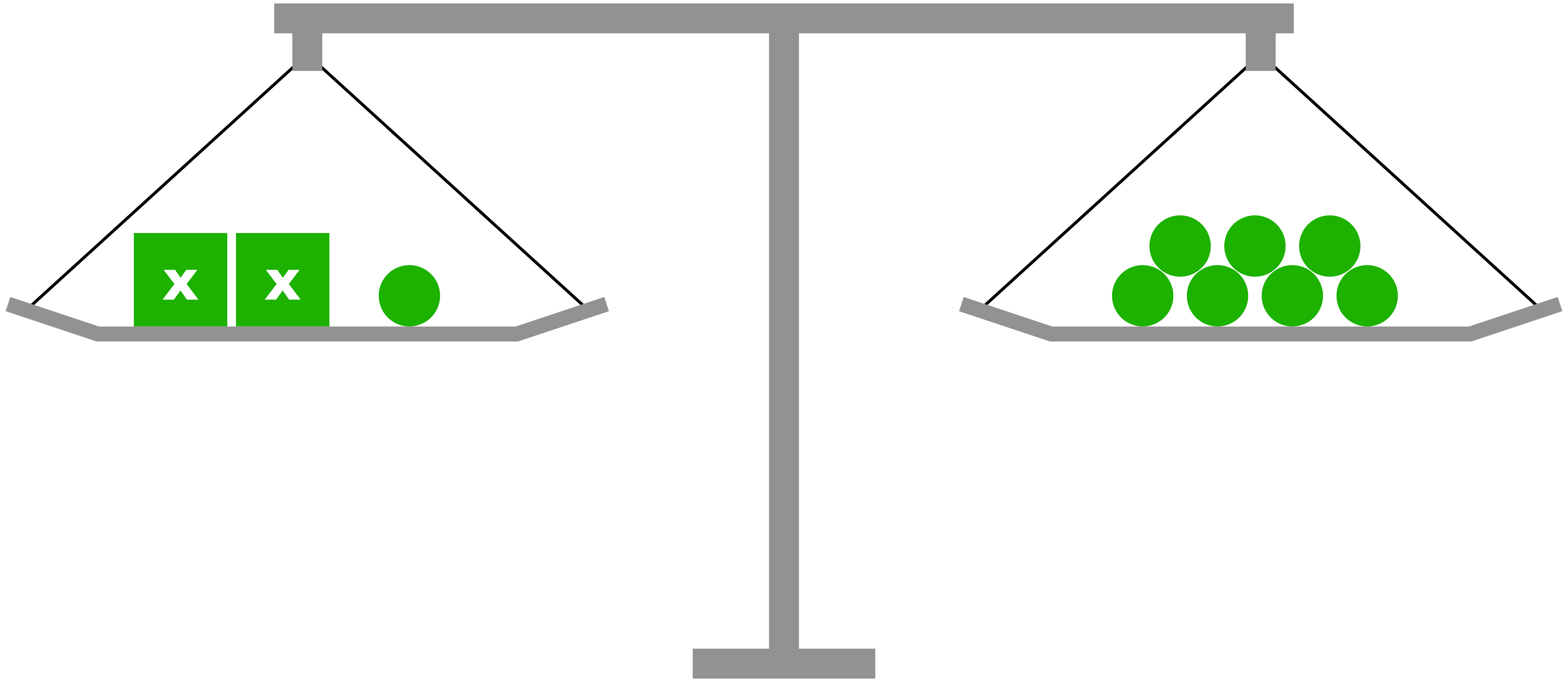
Umformungsäquivalenz: Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie durch Äquivalenzumformungen ineinander übergehen.

(Weigand et al., 2022, S. 242 ff.)

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= 7 \quad && | -1 \\
2x &= 6 && | :2 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

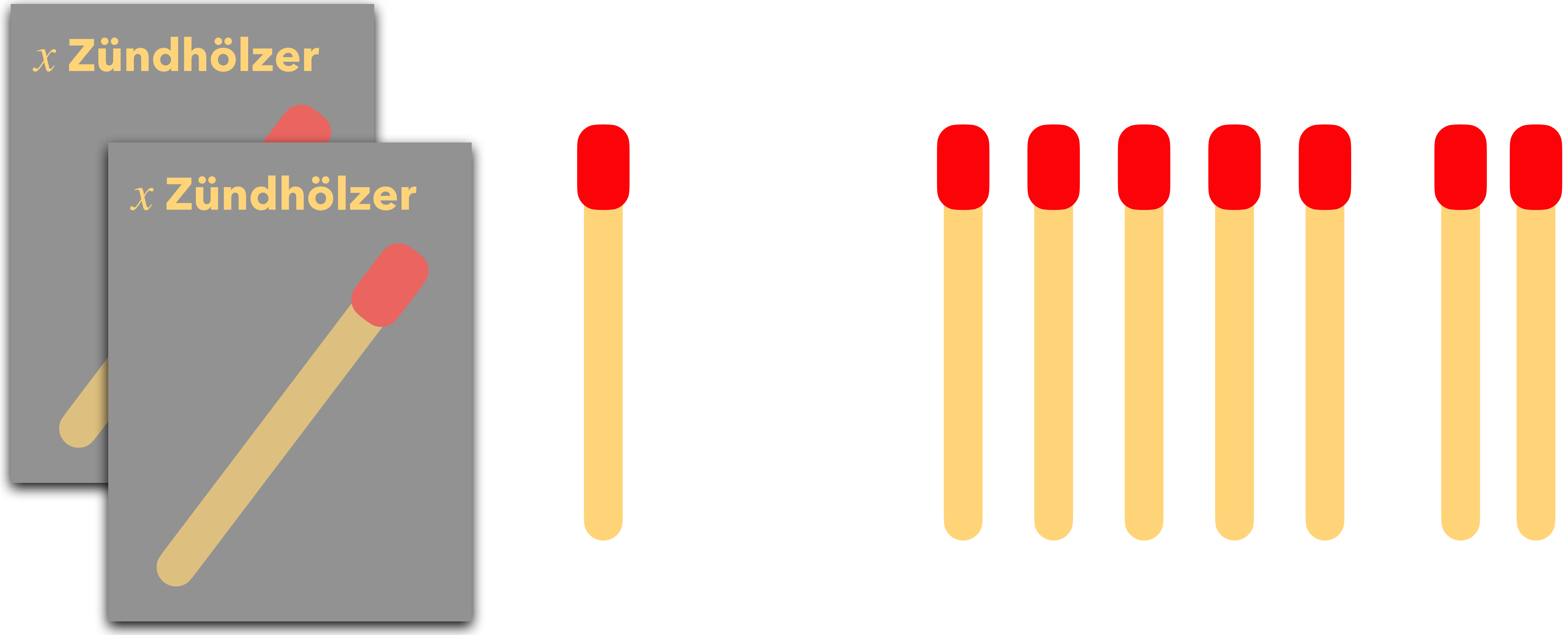


- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

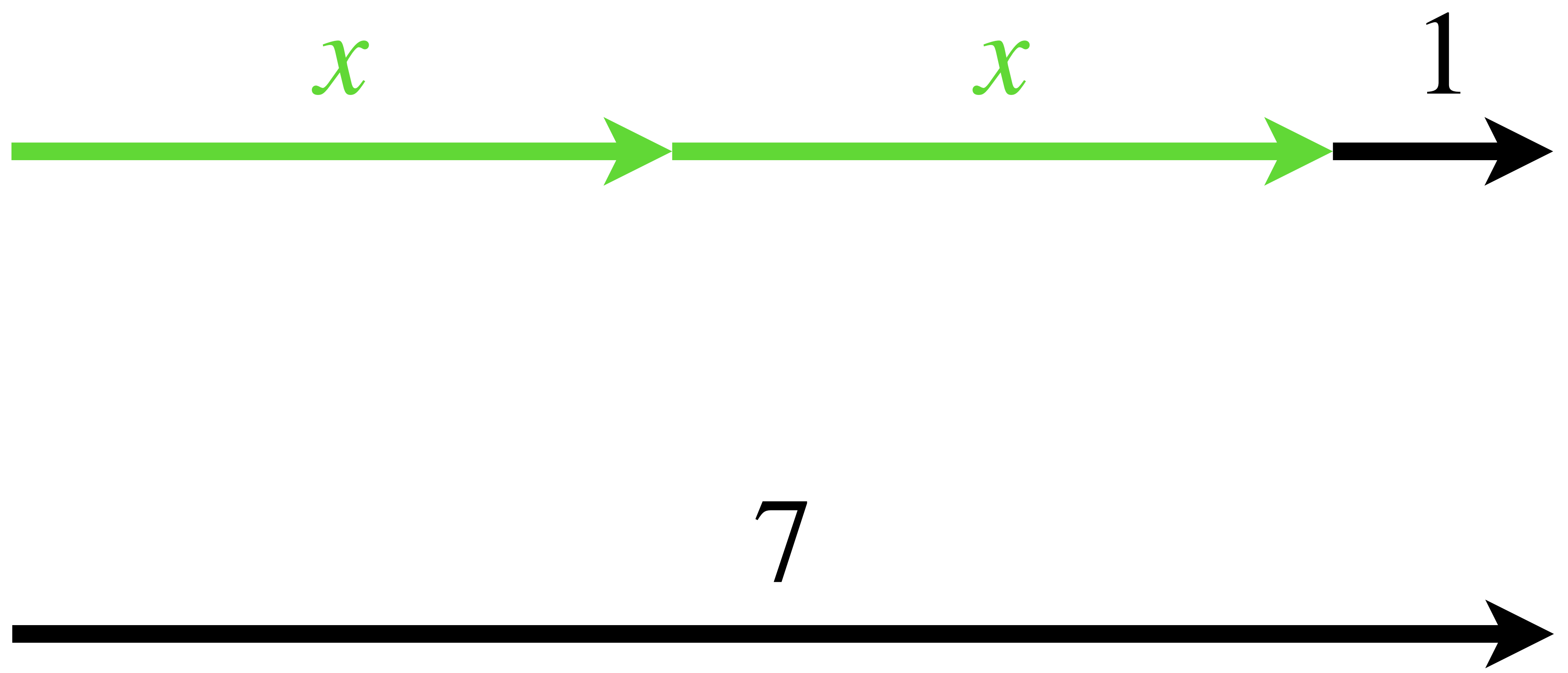
$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 7 \qquad \mid -1 \\ 2x &= 6 \qquad \mid :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 7 \quad && \mid -1 \\ 2x &= 6 && \mid :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$



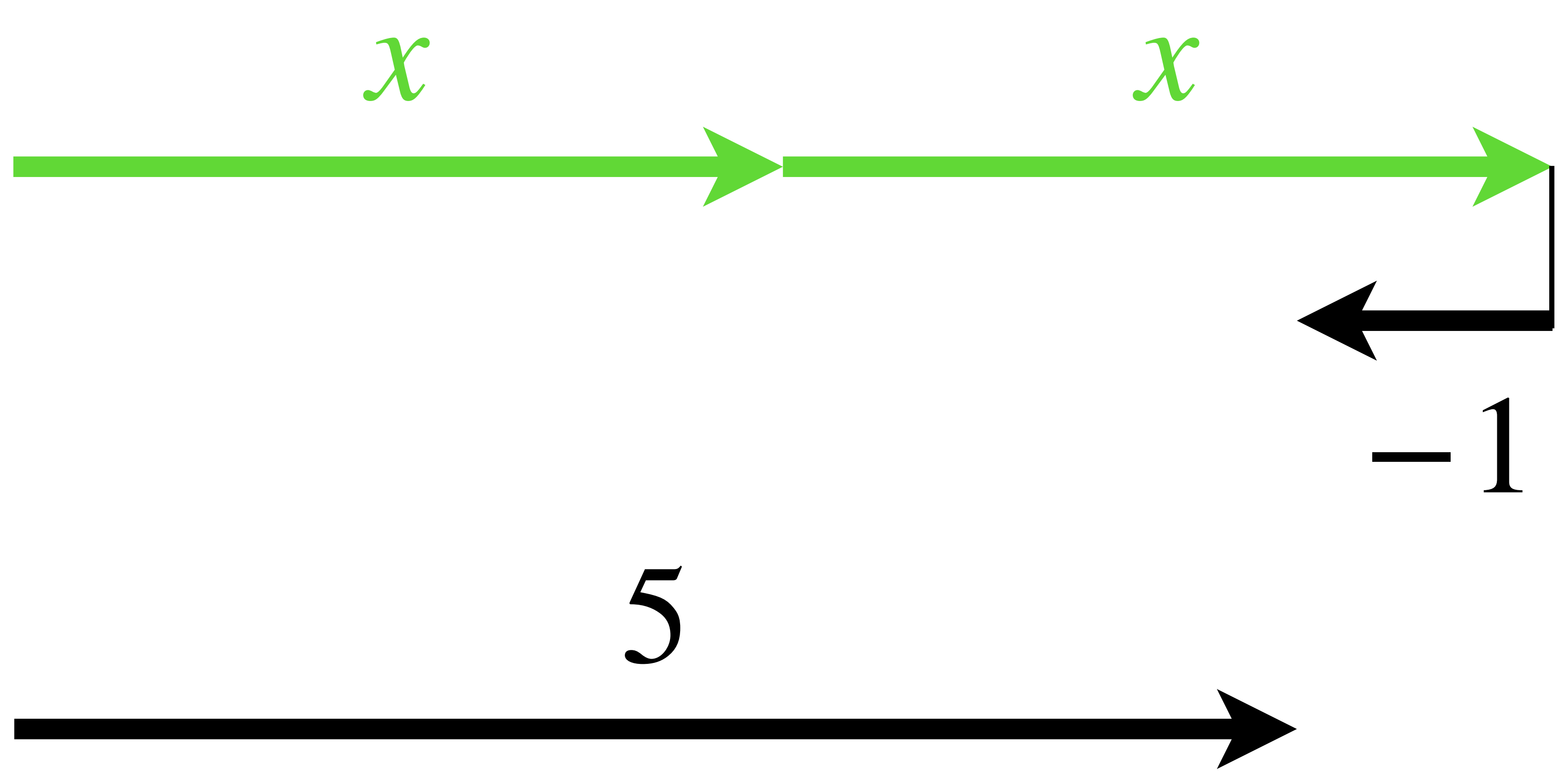
Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$2x - 1 = 5$$



- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Literatur

Dohrmann, C., & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 29–42). https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

Lompscher, J. (1996, 15.09). *Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten—Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung*. Übersetzung eines Referats auf dem Symposium "Die ZdnE: Beziehungen zwischen Erziehung und Entwicklung" im Rahmen der 2. Internationalen Konferenz zur soziokulturellen Forschung, Genf. https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/444/file/AUFSTEIG.pdf

Reinhold, F., Walter, D., & Weigand, H.-G. (2023). Digitale Medien. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 523–559). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_17

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1