Universität Potsdam – Wintersemester 2024/25

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 7 – Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 7 – Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren

- Sie kennen prinzipielle Möglichkeiten, Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren einzuführen, Aneignungsprozesse mithilfe von Orientierungshilfen zu gestalten und die Inhalte zu festigen.
- Sie erkennen Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den typischen Vorgehensweisen für Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren.
- Sie können die Prozesse tätigkeitstheoretisch einordnen.

Typische Unterrichtssituationen

	Begriff	Zusammenhang	Verfahren

Stoffvermittlung

Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen** schaffen und **Aneignungshandlungen etappenweise verinnerlichen**

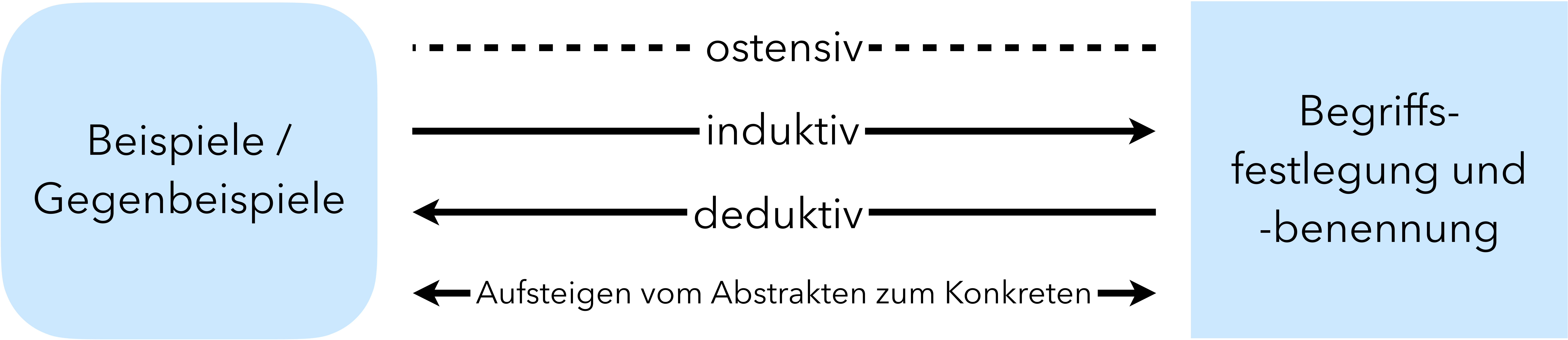
Festigung

vielfältiges **Üben** und komplexes **Anwenden**

CC BY SA

Man spricht allgemein von einem »Begriff«, wenn eine Anzahl von Objekten oder Ereignissen aufgrund gewisser übereinstimmender Merkmale mit einem gemeinsamen Namen belegt wird.

(vgl. Weinert 1974, S. 664)



CC BY SA

1 Inhalt erarbeiten / **Begriff bilden**

Begriff

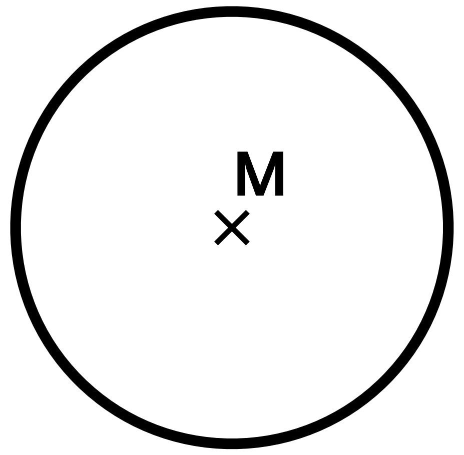
Man spricht allgemein von einem »Begriff«, wenn eine Anzahl von Objekten oder Ereignissen aufgrund gewisser übereinstimmender Merkmale mit einem gemeinsamen Namen belegt wird.

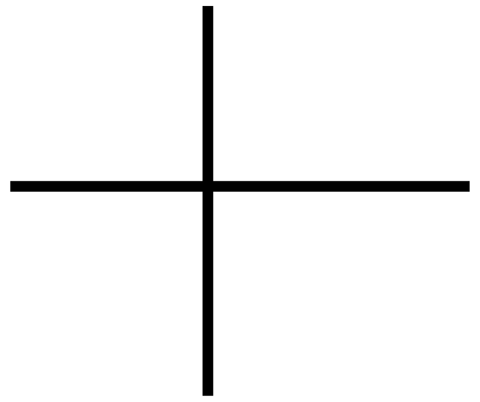
(vgl. Weinert 1974, S. 664)

Beispiele / Gegenbeispiele

ostensiv

nur Hinweis auf Repräsentanten





Begriffs-festlegung und -benennung

CC BY SA

Begriff

Man spricht allgemein von einem »Begriff«, wenn eine Anzahl von Objekten oder Ereignissen aufgrund gewisser übereinstimmender Merkmale mit einem gemeinsamen Namen belegt wird.

(vgl. Weinert 1974, S. 664)

Beispiele / Gegenbeispiele

induktiv →

von Beispielen zur Definition

1. Objekte darbieten
(beobachten, beschreiben, Zweckanalyse)

2. Entdecken von gemeinsamen Merkmalen
(ungeordnet ⇝ nach Merkmalen sortieren oder bereits in Teilmengen aufgeteilt)

3. Begriffsinhalt herausarbeiten

Begriffs-festlegung und -benennung

CC BY SA

Begriff

Man spricht allgemein von einem »Begriff«, wenn eine Anzahl von Objekten oder Ereignissen aufgrund gewisser übereinstimmender Merkmale mit einem gemeinsamen Namen belegt wird.

(vgl. Weinert 1974, S. 664)

Beispiele / Gegenbeispiele ← deduktiv — Begriffs-festlegung und -benennung

von der Definition zu Beispielen

CC BY SA

Man spricht allgemein von einem »Begriff«, wenn eine Anzahl von Objekten oder Ereignissen aufgrund gewisser übereinstimmender Merkmale mit einem gemeinsamen Namen belegt wird.

(vgl. Weinert 1974, S. 664)

Beispiele / Gegenbeispiele

Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten

Betrachtung **eines** charakt. Beispiels → Herausarbeiten des Allgemeinen → Anwenden auf weitere Beispiele

Begriffs-festlegung und -benennung

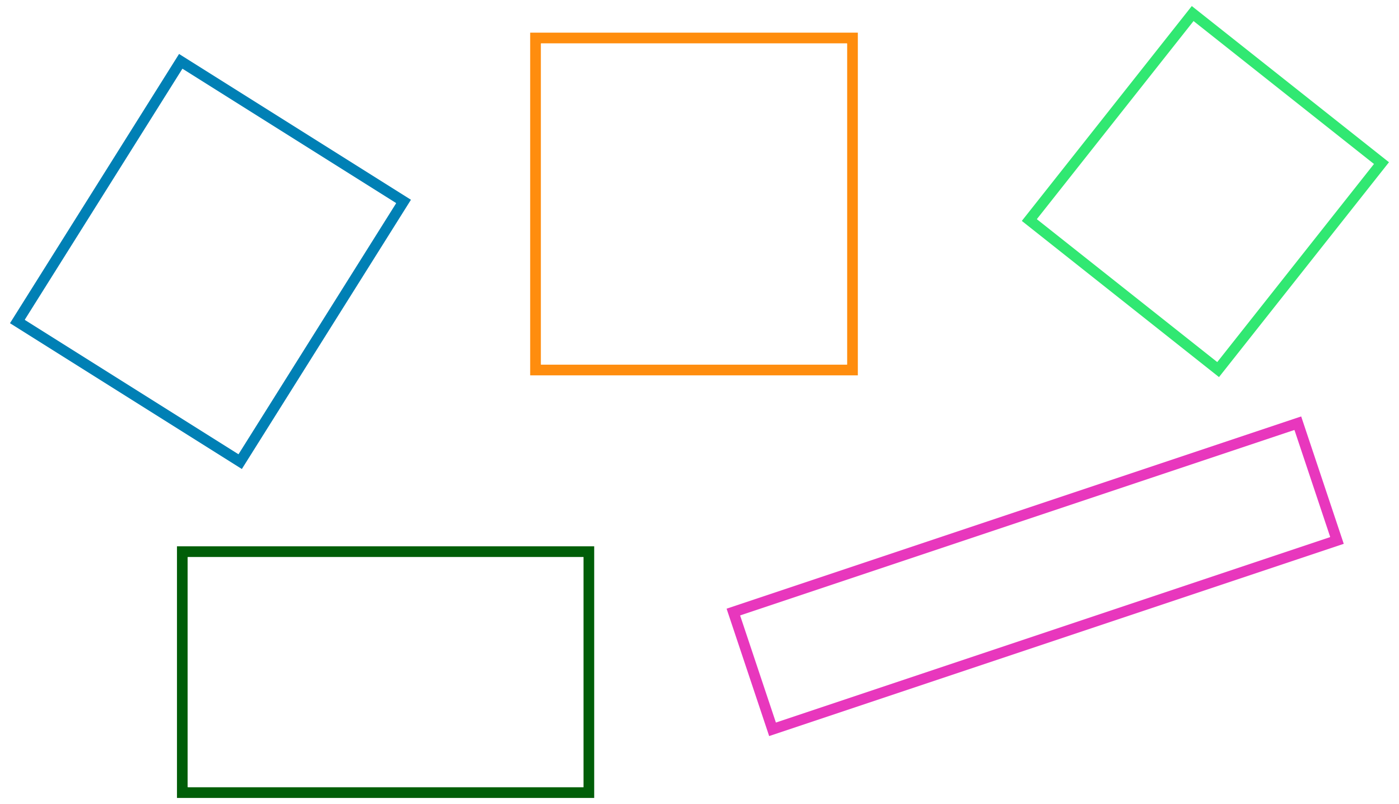
CC BY SA

Man spricht allgemein von einem »Begriff«, wenn eine Anzahl von Objekten oder Ereignissen aufgrund gewisser übereinstimmender Merkmale mit einem gemeinsamen Namen belegt wird.

(vgl. Weinert 1974, S. 664)

Beispiele / Gegenbeispiele

Variationsprinzip



Kontrastprinzip

CC-BY-SA Coyote III
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Esstisch_mit_Blumen.JPG

»Beispiele und Gegenbeispiele sind dann am effektivsten, wenn sich die Beispiele möglichst stark in den irrelevanten Merkmalen unterscheiden und die Gegenbeispiele in möglichst wenigen relevanten Merkmalen unterscheiden.«

(Zech, 1998, S. 261 ff.)

	Identifizieren	Realisieren
Orientierungs-hilfe	• System der Merkmale des Begriffs • Schrittfolge zum Prüfen der Merkmale	• Handlungsvorschrift zum Herstellen oder Vervollständigen des Objekts
materielle/ materialisierte Handlung	Überprüfung der Merkmale an gegebenen Objekten oder an Modellen (Zeichnungen, Diagramme); Orientierungshilfe liegt schriftlich vor	Beim Lösen entsprechender Aufgaben orientieren sich Schülerinnen und Schüler am Text der Handlungsvorschrift, die schriftlich vorliegt.
sprachliche Handlung	sprachliches Begründen des Zutreffens oder Nichtzutreffens der einzelnen Merkmale (unter zunehmender Zurückdrängung der Orientierungshilfe)	Kommentieren des Lösungsweges beim Ausführen der Handlungsschritte (Handlungsvorschrift liegt nicht mehr vor)
geistige Handlung	sofortiges Entscheiden, ob der Begriff zutrifft oder nicht (ohne Benutzung der Orientierungshilfe)	selbstständiges Lösen entsprechender Aufgaben (ohne Verwendung der Handlungsvorschrift)

(Steinhöfel et al., 1988, S. 46)

CC BY SA

3 vielfältiges Üben und komplexes Anwenden

Verwendung von Spezial- und Extremfällen	• Unterbegriffe • Grenzfall
Umformulieren	• verschiedene Definitionsarten • Def. in Merkmalsystem verwandeln
Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen	• Merkmale nicht an feste Variablensymbole binden
Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen	• Oberbegriffe • Einordnung in Begriffssystem
Bedingungen variieren	• Merkmalsvariation durch Weglassen bzw. Hinzufügen von Merkmalen, Ändern der log. Verknüpfung

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

CC BY SA

Zusammenhang finden

- induktiv über das Entdecken von Merkmalen in gegebenen Situationen
- aus dem Widerspruch zu einer angenommenen Hypothese
- deduktiv aus bisherigen Sachverhalten

(Vollrath & Roth, 2012, S. 247 f.)

Innenwinkelsatz bei Dreiecken

Winkel in Dreiecken messen, Summen bilden, Ergebnisse vergleichen

Umkehrung des Satz des Thales

rechte Winkel erzeugen, Punkte »stempeln«, Lage beobachten

https://vam.dzlm.de/vams/apps/digipromin/thales-1.html

Nebenwinkelsatz

Annahme aufgrund von Erkundungen: »Nebenwinkel sind nie gleich groß«

Kosinussatz

Zerlegung eines allgemeinen Dreiecks in rechtwinkl. Dreiecke, Anwendung des Satzes des Pythagoras

p-q-Formel

Herleitung über quadratische Ergänzung

CC BY SA

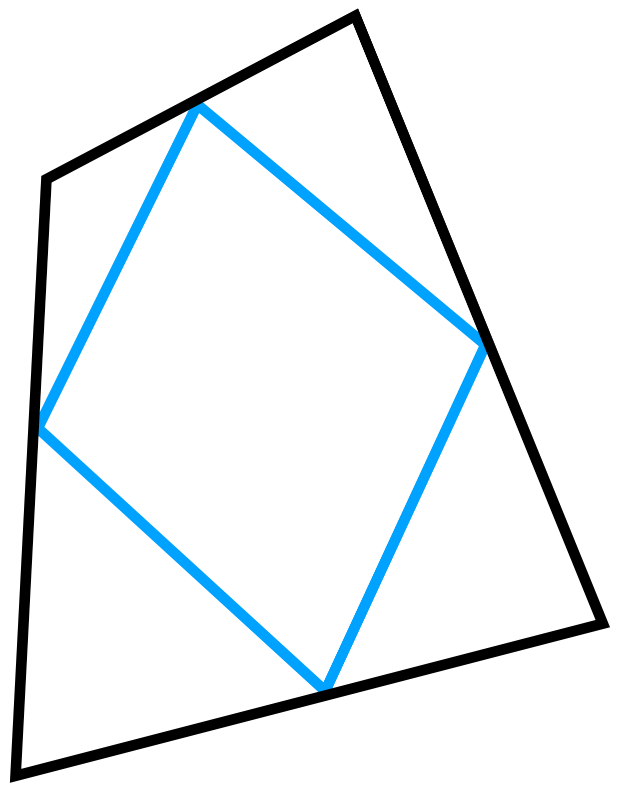
Begründung finden

- über heuristische Strategien (z. B. Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten, Analogieschlüsse)
- heuristische Hilfsmittel (z. B. informative Figuren; Einzeichnen von Hilfslinien)
- Nutzung von Zusammenstellungen wichtiger Sachverhalte und Definitionen

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

Das »Mittenviereck«

Das »Mittenviereck«, das entsteht, wenn man die Mittelpunkte aller Seiten eines Vierecks miteinander verbindet. Um welche Vierecksart handelt es sich beim Mittenviereck?



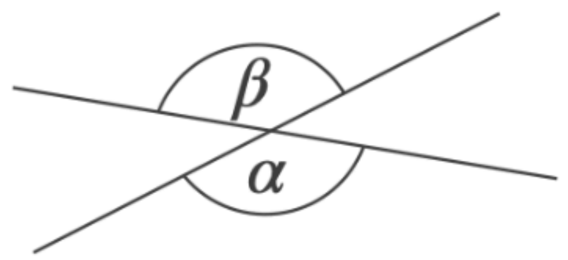
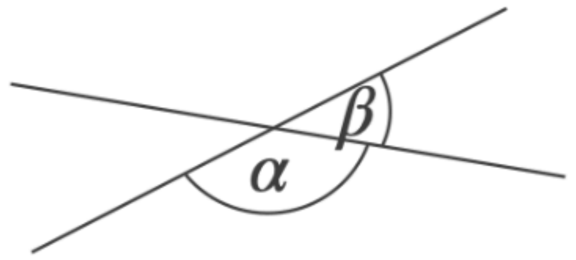
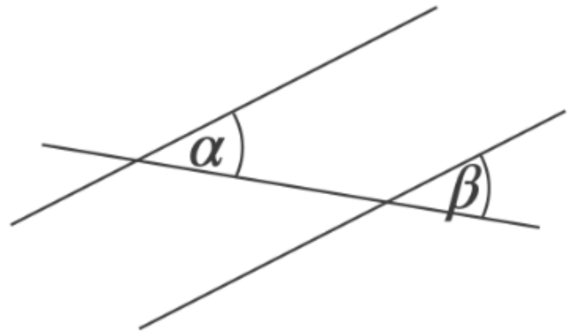
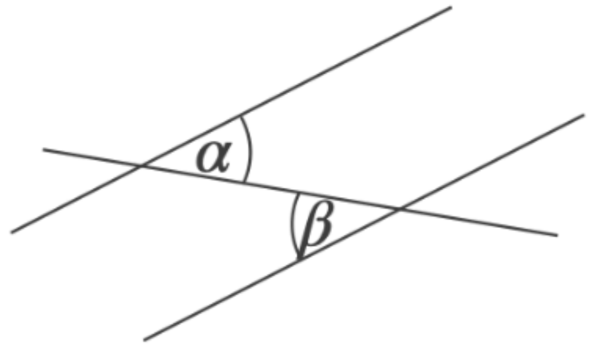
Vierecksart	definierende Eigenschaft
Quadrat	alle Seiten gleich lang, vier rechte Winkel
Rechteck	gegenüberliegende Seiten gleich lang, vier rechte Winkel
Parallelogramm	gegenüberliegende Seiten parallel zueinander
Raute	alle Seiten gleich lang

CC BY SA

Erkennen der inneren Struktur d. Sachverhalts

(Prüfen der Voraussetzungen, Angeben von Beispielen, Herausarbeiten von Voraussetzung und Behauptung)

strukturierter Wissensspeicher:
Tabelle, bestehend aus Bezeichnung, Voraussetzung, Behauptung und Visualisierung des Sachverhalts

Name des Satzes	Voraussetzung	Skizze	Behauptung
Scheitelwinkelsatz	α und β sind ein Scheitelwinkelpaar.		$\alpha = \beta$
Nebenwinkelsatz	α und β sind ein Nebenwinkelpaar.		$\alpha + \beta = 180^\circ$
Stufenwinkelsatz	α und β sind Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen.		$\alpha = \beta$
Wechselwinkelsatz	α und β sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen.		$\alpha = \beta$

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

CC BY SA

Erkennen der inneren Struktur d. Sachverhalts

(Prüfen der Voraussetzungen, Angeben von Beispielen, Herausarbeiten von Voraussetzung und Behauptung)

strukturierter Wissensspeicher:
Tabelle, bestehend aus Bezeichnung, Voraussetzung, Behauptung und Visualisierung des Sachverhalts

strukturbetonende Realisierungsmöglichkeit:
Darstellung des Sachverhalts als Ausfüllhilfe mithilfe von Platzhaltern (v. a. bei algebraischen Zusammenhängen)

1 Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

$$\left(\boxed{-\frac{3}{4}l}\right) \cdot (\boxed{4l} - \boxed{12})$$

$$\square \cdot (\square - \square) = \square \cdot \square - \square \cdot \square$$

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

(Adam & Kleine, 2016, S. 51)

Beweisfindung

(v. a. bei direkten Beweisen)

Handlungsvorschrift:

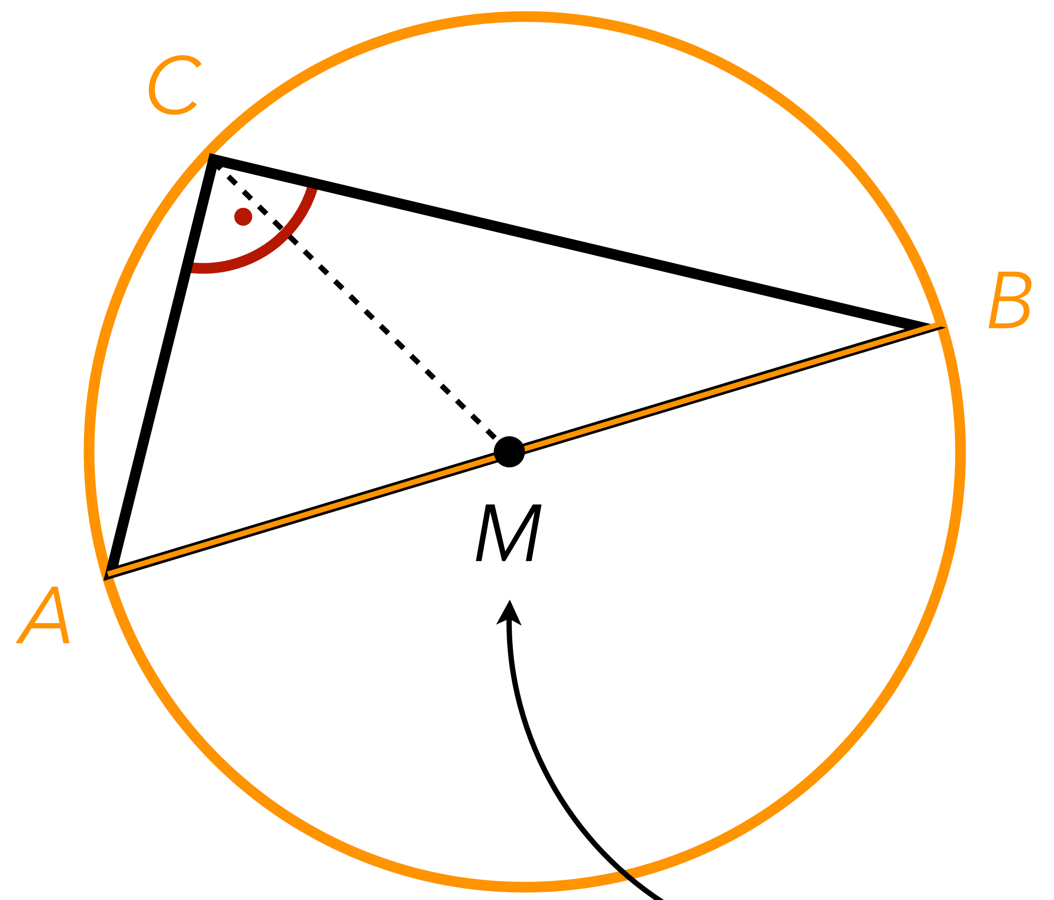
1. Formulieren des Satzes als **Wenn-dann-Aussage**
2. Feststellen von Voraussetzung und Behauptung
3. Erstellen einer **Überlegungsfigur**, Bezeichnung wichtiger Teile sowie der Voraussetzung und Behauptung
4. **Überlegung, woraus die Behauptung folgen** kann. Dabei Verwendung der Überlegungsfigur sowie Orientierung an
   - Definitionen vorkommender Begriffe
   - Sätzen mit gleicher Behauptung
   - Sätzen mit ähnlicher Behauptung
5. Abwägung, welcher Satz bzw. welche Definition geeignet ist
6. **Nachweis der Behauptung** aus den bei 5. gewählten Beweismitteln

(Steinhöfel et al., 1988, S. 72)

Satz des Thales

Wenn C auf einem Kreis mit Durchmesser *AB* liegt, **dann** gilt für das Dreieck *ABC*: $\gamma = 90°$.

andere Sätze mit Aussagen über Winkel in Dreiecken?

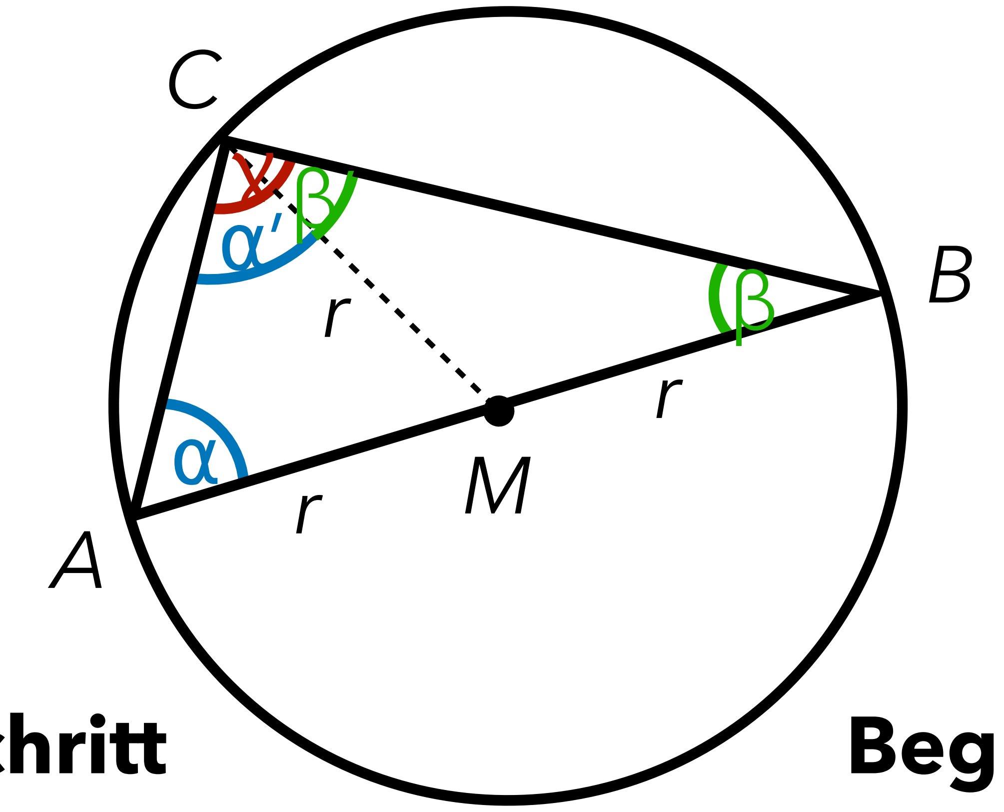


M muss in irgendeiner Form relevant für den Beweis sein!

CC BY SA

Zusammenhang

2 Orientierungshilfen und Aneignungshandlungen



Beweisdarstellung

Beweisschema:

Tabelle, bestehend aus Beweisschritt und Begründung

	Beweisschritt	Begründung
(1)	$AM = MB = MC$, $\gamma = \alpha' + \beta'$	AB Durchmesser, C auf Kreis, Zerlegung von ΔABC mit Radius
(2)	$\alpha = \alpha'$	ΔAMC gleichschenklig nach (1)
(3)	$\beta = \beta'$	ΔBMC gleichschenklig nach (1)
(4)	$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180°$	Innenwinkelsumme in ΔABC und $\gamma = \alpha' + \beta'$ nach (1)
(5)	$2\alpha' + 2\beta' = 180°$	(4) mit (2) und (3)
(6)	$\alpha' + \beta' = 90°$	Umformung von (5)
(7)	$\gamma = 90°$	(1) und (6)

(Steinhöfel et al., 1988, S. 73)

CC BY SA

3 vielfältiges Üben und komplexes Anwenden

Satz des Pythagoras

Verwendung von Spezial- und Extremfällen	• Einschränkung einer oder mehrerer Voraussetzungen • Fallunterscheidungen
Umformulieren	• verschiedene logisch gleichwertige Formulierungen
Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen	• Voraussetzungen und Behauptungen nicht an feste Symbole binden
Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen	• Sätze mit gleicher Behauptung • Sätze mit ähnlicher Behauptung
Umkehrungen bilden	• Voraussetzungen und Behauptungen vertauschen
Bedingungen variieren	• Weglassen bzw. Hinzufügen von Voraussetzungen

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

CC BY SA

Verfahren als Routine, eine Klasse von Problemen zu lösen ~~Kreativität~~ Disziplin

(Vollrath & Roth, 2012, 262 f.)

Ansatz zum Gewinnen eines Verfahrens:

Reflektierende Betrachtung der Lösung spezifischer Probleme derselben Problemklasse

- Was haben all die betrachteten Probleme gemeinsam?
- Welche Schritte haben wir jeweils durchgeführt, um das Problem zu lösen?
- Wozu haben wir die Schritte durchgeführt?
- Warum war es möglich, die Schritte durchzuführen?

CC BY SA

Intervallschachtelung zum näherungsweisen Bestimmen einer Wurzel

- Was haben all die betrachteten Probleme gemeinsam?
- Welche Schritte haben wir jeweils durchgeführt, um das Problem zu lösen?
- Wozu haben wir die Schritte durchgeführt?
- Warum war es möglich, die Schritte durchzuführen?

$$\sqrt{5}$$

$$2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$2{,}1^2 = 4{,}41 \qquad 2{,}2^2 = 4{,}84 \qquad 2{,}3^2 = 5{,}29$$

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

CC BY SA

Gesucht ist eine Näherung für $\sqrt{n}$.

1. Finde natürliche Zahlen a_1, b_1 mit $a_1^2 < n < b_1^2$.
2. Finde a_2, b_2 mit einer Dezimalstelle, sodass $a_1 < a_2, b_2 < b_1$ und $a_2^2 < n < b_2^2$.
3. Wiederhole den letzten Schritt jeweils mit einer weiteren Dezimalstelle bis zur gewünschten Anzahl k an Dezimalstellen. Du erhältst $a_k^2 < n < b_k^2$.
4. a_k bzw. b_k sind Näherungen für $\sqrt{n}$.

Intervallschachtelung zum näherungsweisen Bestimmen einer Wurzel

$$\sqrt{5}$$

$$2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$2{,}1^2 = 4{,}41 \qquad 2{,}2^2 = 4{,}84 \qquad 2{,}3^2 = 5{,}29$$

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

CC BY SA

	Verfahren anwenden
Orientierungshilfe	schriftliche Fixierung des Verfahrensablaufs – als Wortvorschrift, als Flussdiagramm bzw. als Graph o. Ä.
materielle/materialisierte Handlung	Verfahrensablauf liegt in schriftlicher Form vor.
sprachliche Handlung	Verfahrensablauf liegt nicht mehr schriftlich vor. Die einzelnen Schritte werden von den Schülerinnen und Schülern während der Ausführung kommentiert.
geistige Handlung	Die Schülerinnen und Schüler führen das Verfahren selbstständig und ohne schriftlich vorliegenden Verfahrensablauf aus.

(Steinhöfel et al., 1988, S. 118)

CC BY SA

3 vielfältiges Üben und komplexes Anwenden

Verwendung von Spezial- und Extremfällen	• Spezialisierung von Operanden (Fallunterscheidungen)
Umformulieren	• evtl. unterschiedliche Reihenfolge der Operationen
Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen	• unterschiedliche Formalisierungen (Blockschema, Wortvorschrift, Graph, …)
Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen	• Unteralgorithmen • Oberalgorithmen
Umkehrungen bilden	• Umkehroperationen bilden
Bedingungen variieren	• unterschiedliche Variablengrundbereiche

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

CC BY SA

Festigung	Begriff	Zusammenhang	Verfahren
Verwendung von Spezial- und Extremfällen	• Unterbegriffe • Grenzfall	• Einschränkung einer oder mehrerer Voraussetzungen • Fallunterscheidungen	• Spezialisierung von Operanden (Fallunterscheidungen)
Umformulieren	• verschiedene Definitionsarten • Def. in Merkmalsystem verwandeln	• verschiedene logisch gleichwertige Formulierungen	• evtl. unterschiedliche Reihenfolge der Operationen
Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen	• Merkmale nicht an feste Variablensymbole binden	• Voraussetzungen und Behauptungen nicht an feste Symbole binden	• unterschiedliche Formalisierungen (Blockschema, Wortvorschrift, Graph, …)
Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen	• Oberbegriffe • Einordnung in Begriffssystem	• Sätze mit gleicher Behauptung • Sätze mit ähnlicher Behauptung	• Unteralgorithmen • Oberalgorithmen
Umkehrungen bilden		• Voraussetzungen und Behauptungen vertauschen	• Umkehroperationen bilden
Bedingungen variieren	• Merkmalsvariation durch Weglassen bzw. Hinzufügen von Merkmalen, Ändern der log. Verknüpfung	• Weglassen bzw. Hinzufügen von Voraussetzungen	• unterschiedliche Variablengrundbereiche

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

CC BY SA

Literatur

Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Potsdam*, *35*(2), 129–134.

Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 8, Berlin/Brandenburg* (1. Auflage). C.C.Buchner.

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4

Steinhöfel, W., Reichold, K., & Frenzel, L. (1988). *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht*. Ministerium für Volksbildung.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik* (9. Aufl.). Beltz Verlag.