

Universität Potsdam – Wintersemester 2024/25

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 6 – Lernhandlungen ausbilden

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 6 – Lernhandlungen ausbilden

- Sie können typische Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht benennen, beschreiben und lernpsychologisch begründen.
- Ihnen ist die Bedeutsamkeit von Identifizierungs- und Realisierungshandlungen in der Stoffvermittlung bewusst.
- Sie kennen eine Möglichkeit, wie geistige Handlungen schrittweise ausgebildet werden können.



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- **Identifizieren**
- Realisieren

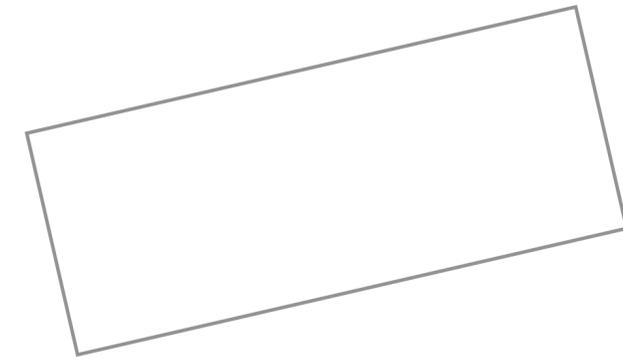
Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Entscheiden, ob es sich um ein Rechteck handelt



Einkreisen aller Stammbrüche

$$\frac{2}{5} \quad \frac{1}{8} \quad 0,23 \quad 1\frac{2}{7} \quad \frac{1}{50}$$



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- **Realisieren**

Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Zeichnen eines Quadrats mit der Seitenlänge $a = 5 \text{ cm}$

Angeben der Ergebnismenge eines Würfelwurfes



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

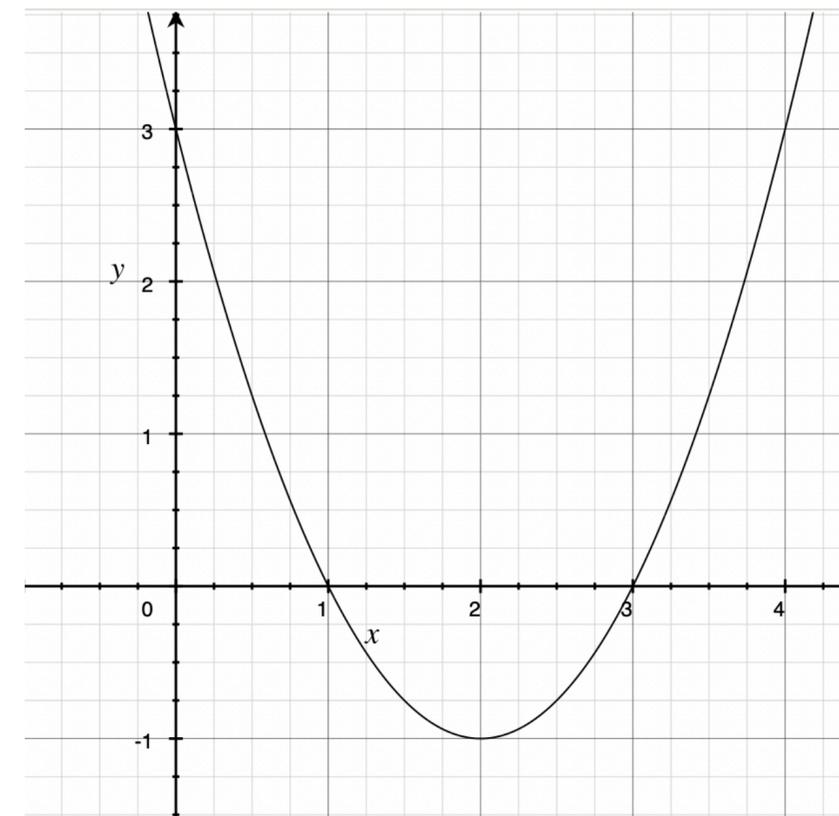
Grundhandlungen

- **Erkennen**
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Ermitteln der Nullstellen
aus dem Funktionsgraphen





Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

Grundhandlungen

- Erkennen
- **Beschreiben**
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Beschreiben, wie ein Kreis mit dem Radius $r = 3 \text{ cm}$ gezeichnet wird

Beschreiben der Vorgehensweise beim Bestimmen der Nullstellen



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

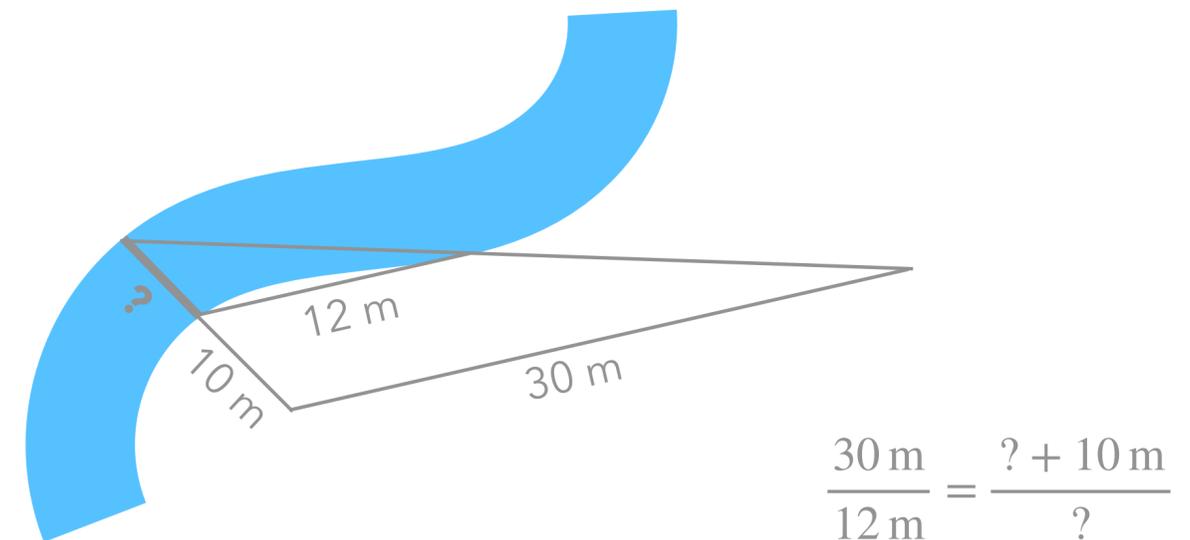
Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- **Verknüpfen**
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Bestimme die Flussbreite.



Verwenden von Strahlensatzfigur und Termumformungen zum Lösen der Aufgabe



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- **Anwenden**
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Lösen des Gleichungssystems
mit dem Einsetzungsverfahren

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Berechnen von $2,75 \cdot 3,1$



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

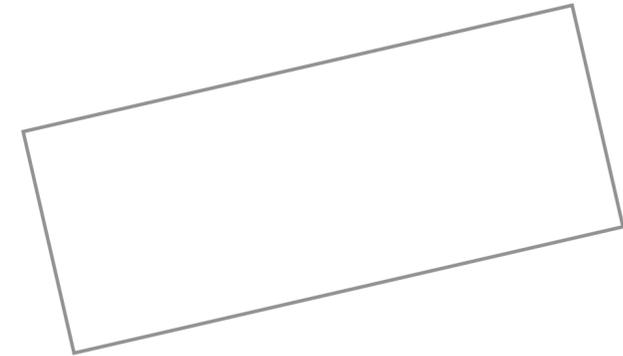
Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- **Begründen**

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Begründen, warum es sich um ein Rechteck handelt



Begründen, warum die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen wieder durch 3 teilbar ist



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- **Suchen**
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?

Suchen des Lösungsansatzes, die Situation geometrisch zu modellieren



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- **Planen**
- Ausführen
- Kontrollieren

Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?

1. Modellieren des Raums als Quader und der Luftballons als Kugeln
2. Schätzen/Messen der Größen
3. Nutzen der Volumenformeln
4. Inbeziehungsetzen der Volumina



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?

Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Handlungsvollzug des Plans

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- **Ausführen**
- Kontrollieren



Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht (Bruder & Brückner, 1989)

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- **Kontrollieren**

Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?

Validieren des Ergebnisses;
ggf. Entscheidung zu weiterem
Durchgang des Modellierungs-
kreislaufes



Typische Unterrichtssituationen



Motivierung & Zielbildung

Sicherung des Ausgangsniveaus

Stoffvermittlung

(Bruder, 1991)



Lernpsychologische Hintergründe aus der Tätigkeitstheorie



Schlussfolgerungen für die Gestaltung von Lernprozessen

Prinzip 2:

Tätigkeiten sind **auf den Gegenstand**
gerichtet, erfolgen aber immer **über Mittel**.



Orientierungshilfen

Sprache



Vorstellungen



(bereits ausgebildete)

Lernhandlungen



Arbeitsmittel

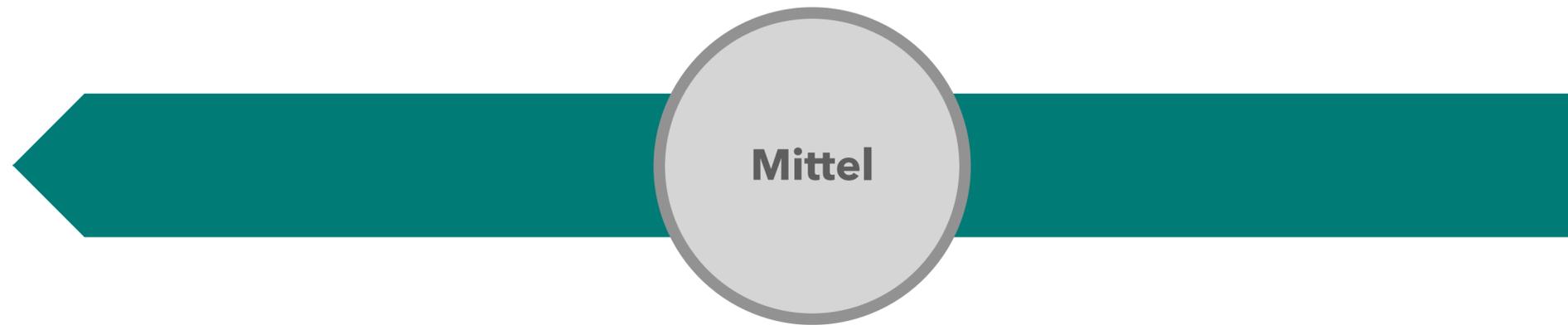


entscheidend:

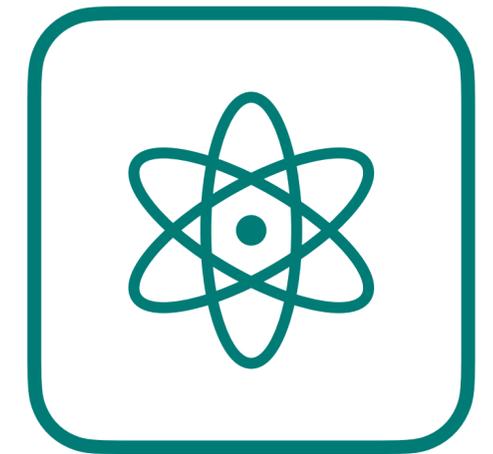
Das Mittel erfüllt für das Individuum die *Funktion* eines Mittlers.



Individuum



Aneignung



Lerngegenstand



Lernpsychologische Hintergründe aus der Tätigkeitstheorie



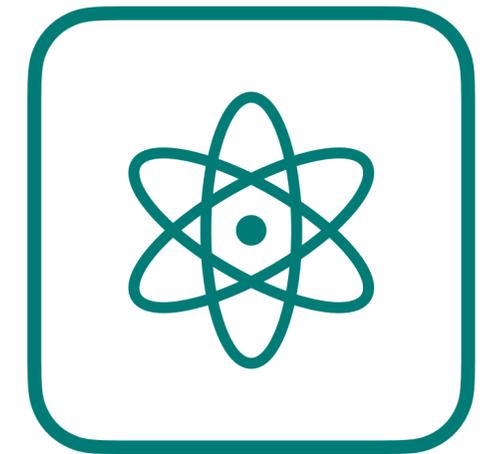
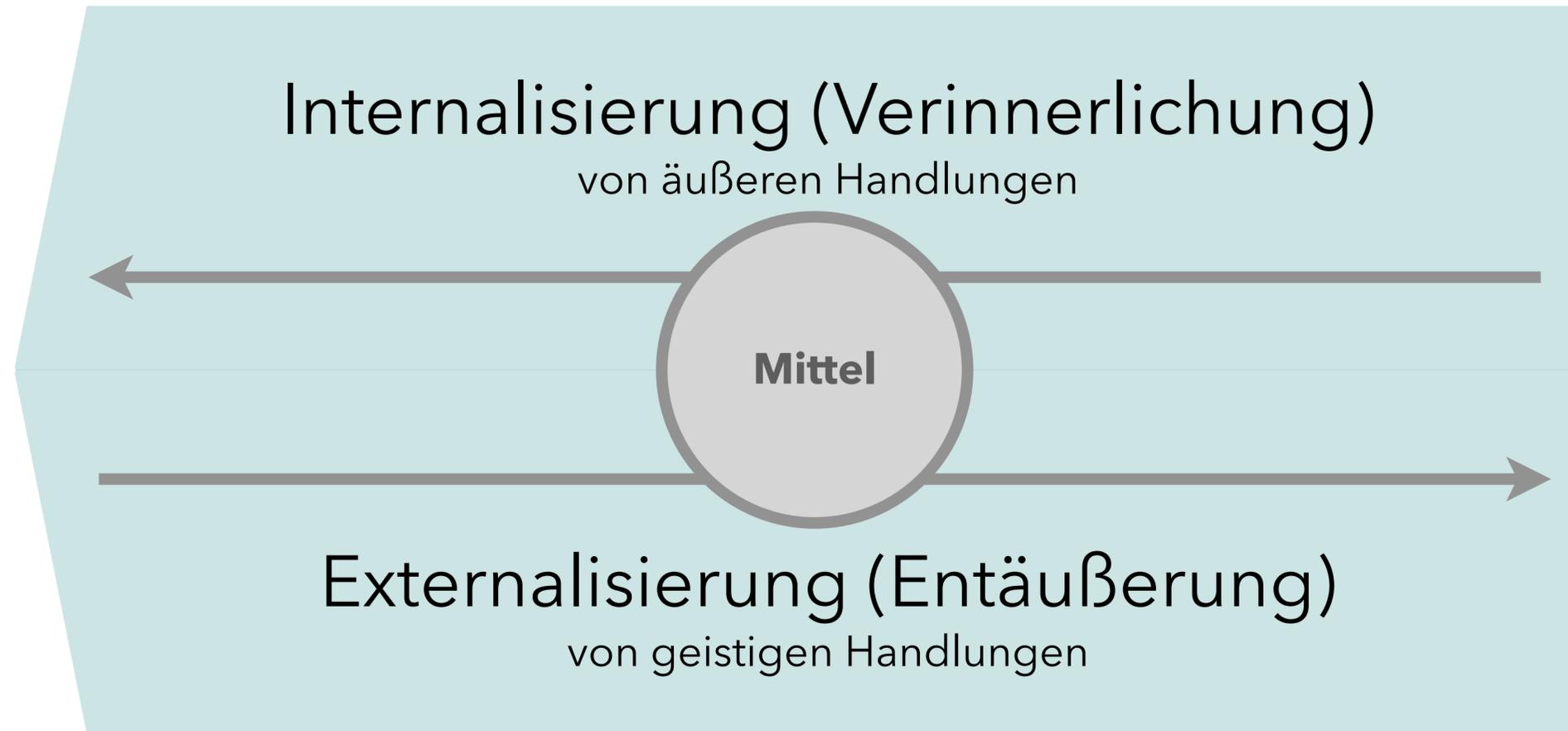
Schlussfolgerungen für die Gestaltung von Lernprozessen

Prinzip 3:

Aneignung ist die Einheit aus
Internalisierung und Externalisierung.

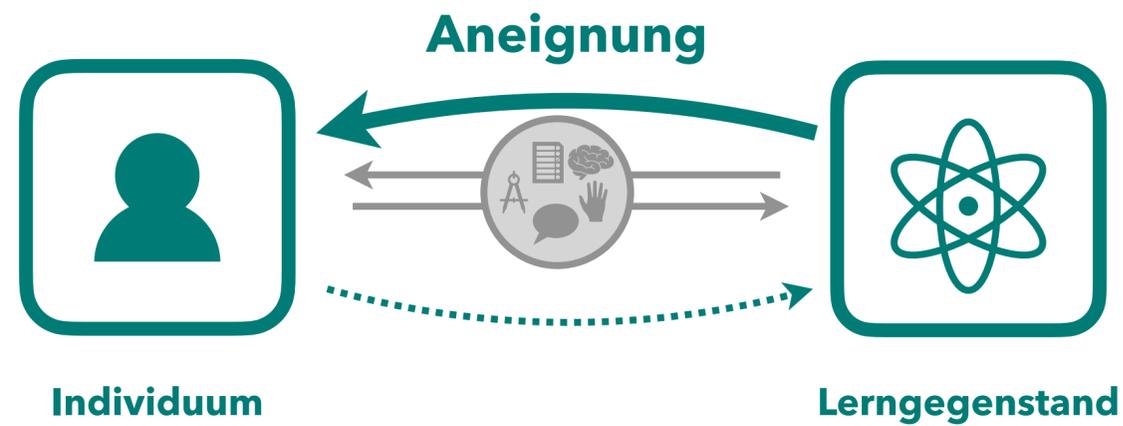


Individuum



Lerngegenstand

Aneignung



Stoffvermittlung

Die Lernhandlung muss zunächst **beigebracht** werden (z. B. durch Vorführen), anschließend muss sie vom Lernenden **ausgeführt** und **angeeignet** werden, damit sie flexibel zur Verfügung steht – auch um komplexere Handlungen aufbauen zu können.



Stoffvermittlung

- Erarbeiten des neuen Lerngegenstands

Begriff

Zusammenhang

Verfahren

- Einführung in Lernhandlungen und Schaffen von Orientierungshilfen

Verbalisierungen/Repräsentationen
zum Finden geeigneter Lernhandlungen

- Verinnerlichen der Aneignungshandlungen - »Erstaneignung«

Identifizieren und Realisieren



• Verinnerlichen der Aneignungshandlungen - »Erstaneignung«

Das Kind handelt am geeigneten Material.

- 1 Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.

Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.

- 2 Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.

Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.

- 3 Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.

Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.

- 4 Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

(Wartha & Schulz, 2011, S. 11)

Ausbilden von Grundvorstellungen

1. **Etappe der materiellen bzw. materialisierten Handlung**

Realisierung z.B. durch:

- Umgang mit Modellen, Schemata, Zeichnungen, realen Gegenständen u.ä. (bzw. Bau von Modellen, Anfertigen von Skizzen, ...)
- Verwendung von Symbolen
- Verwendung von Tabellen und Übersichten

2. **Etappe der sprachlichen Handlung**

- Kommentierendes Lösen unter zunehmender Zurückdrängung schriftlicher Orientierungsmaterialien
- Chorsprechen
- Schülervortrag
- Wiederholen von Merksätzen u.ä.
- Korrektur sprachlicher Äußerungen

3. **Etappe der geistigen Handlung**

- Stillarbeit (selbständiges Lösen von Aufgaben ohne detaillierte Anleitung, im Prinzip nur Ergebniskontrolle)
- mündliches oder schriftliches Formulieren von Antworten (evtl. Ausfüllen von Lückentexten).

(Steinhöfel et al., 1988, S. 19)



- Verinnerlichen der Aneignungshandlungen - »Erstaneignung«
 - 1. Etappe der materiellen bzw. materialisierten Handlung**
 - Handlungen mit konkretem Material bzw. anhand von zur Verfügung stehenden Orientierungshilfen.
 - 2. Etappe der sprachlichen Handlung**
 - Handlungen werden ohne/mit geringer Zuhilfenahme des Materials durchgeführt und durch äußeres (oder inneres) Sprechen beschrieben.
 - 3. Etappe der geistigen Handlung**
 - Handlungen werden nun rein kognitiv durchgeführt.



Stoffvermittlung

Begriff

Zusammenhang

Verfahren

- Erarbeiten des neuen Lerngegenstands
- Einführung in Lernhandlungen und Schaffen von Orientierungshilfen
- (Etappenweises) Verinnerlichen der Aneignungshandlungen

Festigung

- Verwendung von Spezial- und Extremfällen
- Umformulieren, Bedingungen variieren, Umkehrungen bilden
- Verwendung unterschiedlicher Bezeichnungen
- Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen

**vgl. auch
Operatives
Prinzip**

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

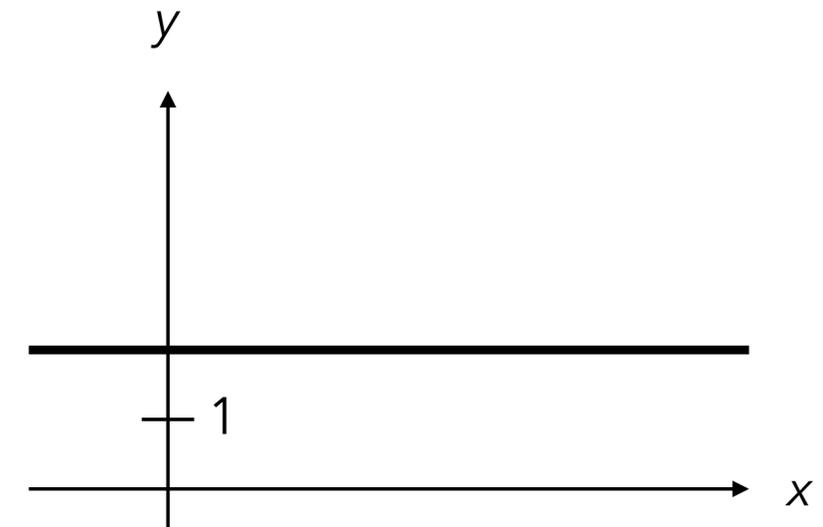


Funktionsbegriff

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, d. h. jedem Element einer Ausgangsmenge wird genau ein Element einer Zielmenge zugeordnet.

Festigungsaufgaben

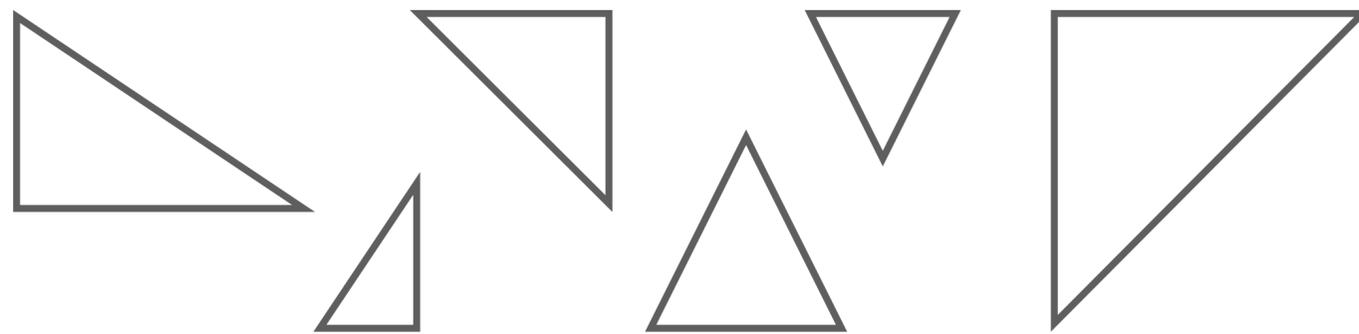
- *Entscheide, ob es sich um den Graphen einer Funktion handelt.*
- *Formuliere eine Definition des Funktionsbegriffs mit eigenen Worten.*
- *Gib für die Funktion »Jeder Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet« eine Funktionsgleichung an, in der nicht die Variablen f , x und y auftreten.*
- *Beschreibe an einem Beispiel, was der Unterschied zwischen Zuordnungen und Funktionen ist. Entscheide, ob es sich bei proportionalen Zuordnungen um Funktionen handelt und begründe deine Entscheidung.*



Kontext: Im Filmstudio

Kernfrage: Wie vergrößert man so, dass die Formen nicht verzerren?

(Barzel et al., 2016)



Zwei Figuren heißen ähnlich zueinander, wenn sie in ihren Winkeln und Seitenverhältnissen übereinstimmen.

Bilde Gruppen, sodass die Figuren innerhalb einer Gruppe durch Vergrößern/Verkleinern aufeinander passen.

Miss bei den Figuren innerhalb einer Gruppe die Seitenlängen und Winkelgrößen und beschreibe Zusammenhänge.

3

vielfältiges Üben und
komplexes Anwenden

Umformulieren

Gib mindestens zwei verschiedene Formulierungen der Teilbarkeitsregel von 5 an.

Spezialfälle

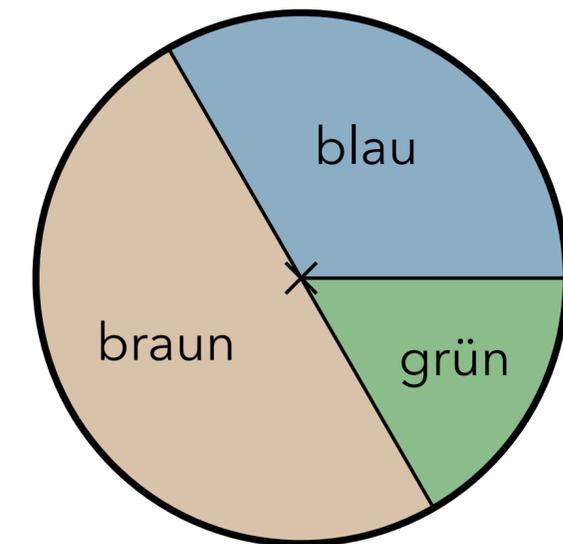
*Was kann hinter dem Klecks stehen, damit die Zahl 13~~4~~ durch 2, 3 bzw. 8 teilbar ist?
Erstelle selbst derartige Klecks-Aufgaben.*

Bekanntes vs. Neues

*Stelle anhand der Teilbarkeitsregeln von 2, 4 und 8 eine Vermutung für die Teilbarkeitsregel von 16 auf.
Überprüfe deine Vermutung an einigen Beispielen und begründe anschließend ihre Allgemeingültigkeit.*

- Bestimme für jeden Versuchsausgang die relative Häufigkeit. $h = \frac{H}{n}$
- Wandle die rel. Häufigkeit in den zugehörigen Winkel um. $100\% \hat{=} 360^\circ$
- Zeichne einen Kreis mit Mittelpunkt und einem Radius.
- Trage die Winkel schrittweise im Kreis ab.
- Beschrifte die entsprechenden Felder.

Augenfarbe	H	h	α
blau	6	33,3 %	120°
braun	9	50,0 %	180°
grün	3	16,7 %	60°
Summe	18	100 %	360°

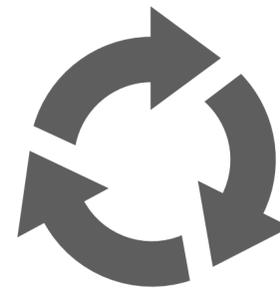




Typische Unterrichtssituationen

Kontrolle und Bewertung

eigene
Handlungsausführung



erreichte (psych.)
Handlungsergebnisse

Lernziele

**Kernidee in
Rückschauperspektive**

Unterstützende Maßnahmen

- Lernziele explizit formulieren und auch festhalten > Abgleich mit Handlungsergebnissen besser möglich
- Anfertigen eines Lernprotokolls > eigenen Lernhandlungen dokumentier- und nachvollziehbar
- gegenseitige Kontrolle der Schülerinnen und Schüler > durch Verinnerlichung dieses Vorgehens später auch Selbstkontrolle



Typische Unterrichtssituationen

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung** mit **sinnstiftendem Kontext**
bewusste **Lernzielbildung**, z. B. über **Kernfragen**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren** von
Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten

Stoffvermittlung

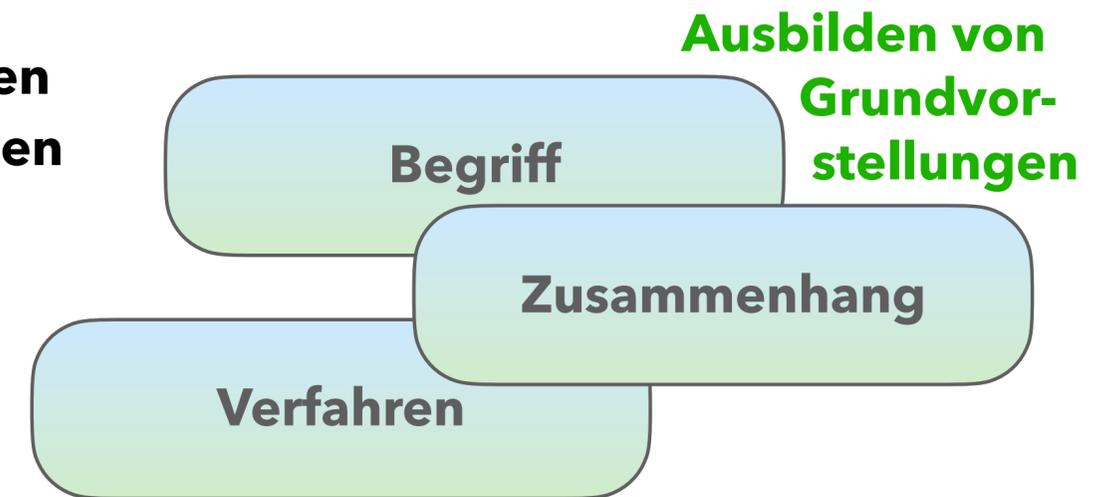
Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen**
schaffen und **Aneignungshandlungen**
etappenweise verinnerlichen

Festigung

vielfältiges **Übungen** und
komplexes **Anwenden**

Kontrolle und Bewertung

Abgleich zwischen Handlungsverlauf,
Handlungsergebnis und Lernziel, z. B. über Betrachtung
der **Kernidee in der Rückschauerspektive**



(Bruder, 1991)

Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2016). *Mathewerkstatt. 9, Schulbuch* (1. Aufl.). Cornelsen.

Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Potsdam*, 35(2), 129-134.

Bruder, R., & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. *Pädagogische Forschung. Wissenschaftliche Nachrichten*, 30(6), 72-82.

Steinhöfel, W., Reichold, K., & Frenzel, L. (1988). *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht*. Ministerium für Volksbildung.

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. IPN Kiel. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf