Universität Potsdam – Wintersemester 2024/25

# Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 4 – Kernideen und Kontexte

# Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 4 – Kernideen und Kontexte

- Sie kennen das Konzept von Kernideen als das Wesen des Lerngegenstands.
- Sie kennen Kernideen zu einzelnen Lerngegenständen.
- Sie können gegebene Kontexte zu Lerngegenständen hinsichtlich ihrer Sinnstiftung beurteilen.
- Sie sind sich der Möglichkeiten und Bedeutung horizontaler und vertikaler Mathematisierung bewusst.

# Stoffdidaktische Analyse als Spezifizieren & Strukturieren von Lerngegenständen

| | Spezifizieren | Strukturieren |
|---|---|---|
| konkrete Ebene | - **Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten?<br>- **Welche** (inner- und außermathematischen) **Kontexte** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren? | - Wie kann das Verständnis sukzessive **über realitätsbezogene Situationen** in dem beabsichtigten Lernpfaden konstruiert werden (*horizontale Mathematisierung*)?<br>- Wie kann der Lernpfad **in Bezug auf die mathematische Problemstruktur** angeordnet werden (*vertikale Mathematisierung*)? |

**konkrete Ebene ≠ konkrete Unterrichtsplanung**

(angelehnt an Hußmann & Prediger, 2016)

**Lerngegenstand**

**Formale Grundlagen**

**Fundamentale Ideen**

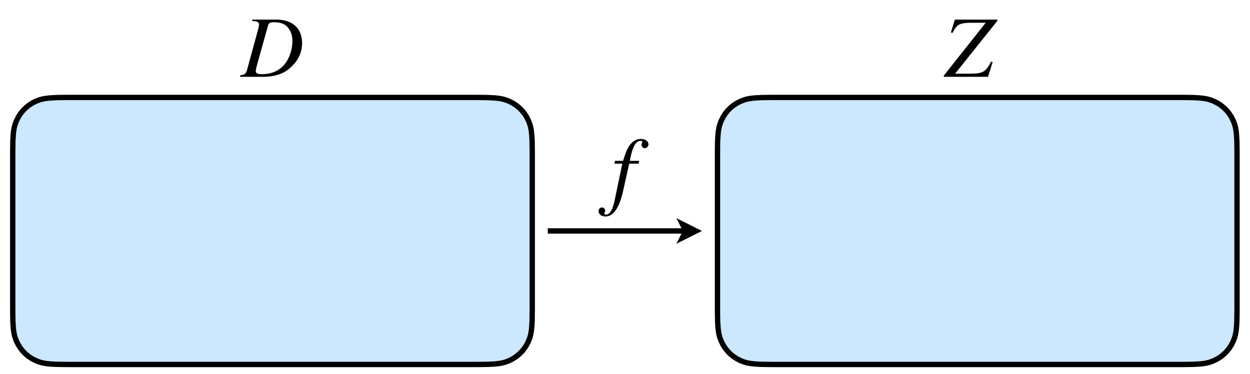
**Grundvorstellungen**

**Kernideen und Kernfragen**

**Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?**

# Funktionen

## Formale Grundlagen




$$f \subseteq D \times Z$$

$f$ linkstotal und rechtseindeutig, d.h.

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Z : (x, y) \in f$$

## Fundamentale Ideen

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren
- …

**Muster erkennen**

**Algebraisierung**

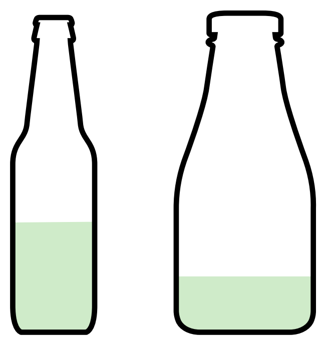
(vgl. Thiel-Schneider, 2018, S. 31).

## Grundvorstellungen

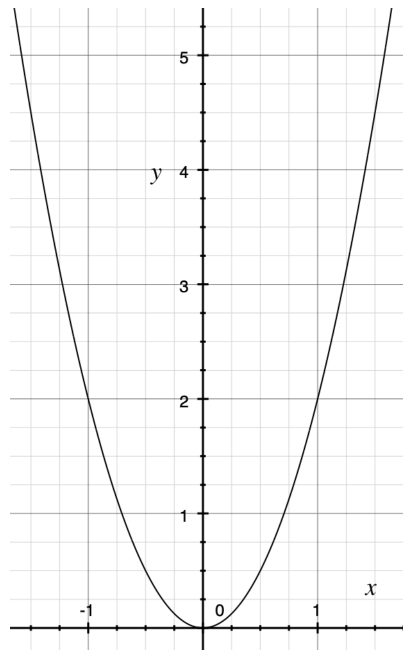
**Zuordnung**

| $x$ | – 2 | – 1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |

**Änderung/Kovariation**



**Objekt**



## Kernideen und Kernfragen

**Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?**

# Funktionen

# Kernideen und Kernfragen

## Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

Mithilfe von Funktionen kann man die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und daraus weitere Werte bestimmen.

**Vorschauperspektive**

**Rückschauperspektive**

»Wie kann man die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann man damit weitere Werte bestimmen?« (Thiel-Schneider, 2018, S. 49).

**Kernfrage**

# Kernideen und Kernfragen

## Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

Eine **Kernidee** beschreibt in wenigen Worten das Wesen* eines Lerngegenstands.

*also das, was ihn aus formaler und semantischer Perspektive auszeichnet – insbesondere in Abgrenzung zu thematisch ähnlichen Lerngegenständen

Eine **Kernfrage** stellt die Kernidee in Frageform aus der Perspektive der Schülerinnen und Schüler dar.

Kernideen und Kernfragen verfolgen eine ***Vorschauperspektive***, die der Orientierung und Initiierung der Auseinandersetzung mit dem neuen Lerngegenstand dient, sowie eine ***Rückschauperspektive***, die es den Schülerinnen und Schülern ermöglicht, ihren eigenen Lernprozess zu reflektieren und den Lerngegenstand einzuordnen.

(angelehnt an Leuders et al. 2011, S. 8)

# Kernideen und Kernfragen

## Was soll für die Schüler/-innen das Wesentliche des Lerngegenstands sein?

**Quadratische Funktionen**

*Wie kann ich krumme Kurven beschreiben?*

(Barzel et al., 2016, S. 190)

**Konstruktion von Dreiecken**

*Wie kann ich mit Dreiecken Landschaften vermessen?*

(Leuders et al., 2015, S. 164)

**Negative Zahlen**

*Wie kann ich rechnen, wenn ich mehr wegnehme, als ich habe?*

(Leuders et al., 2015, S. 74)

**Bedingte Wahrscheinlichkeiten**

*Wie kann ich einschätzen, einem medizinischen Testergebnis zu vertrauen?*

**Vorschauperspektive:** Orientierung, Initiierung der Auseinandersetzung mit Lerngegenstand

**Rückschauperspektive:** Reflexion des eigenen Lernprozesses, Einordnung des Lerngegenstands

**Quadratische Funktionen**

»Wie kann ich krumme Kurven beschreiben?«

(Barzel et al., 2016, S. 190)

# Kontexte

!

Ein **sinnstiftender Kontext** ist ein Ausschnitt einer inner- oder außermathematischen Welt, der folgende Anforderungen möglichst gut erfüllt:

- Er ist anschlussfähig an die Erfahrungen, Interessen und die Denk- und Handlungsmuster der Lernenden **(Lebensweltbezug)**.
- Er ermöglicht es, authentische Fragen zu bearbeiten und dabei auch etwas über den Kontext zu lernen **(Kontextauthentizität)**.
- Er ist problemhaltig und offen genug, um Lernende zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen **(Reichhaltigkeit)**.

(Leuders et al. 2011, S. 4)

# Kernfragen / Kernideen

**Funktionen**

»Wie kann ich die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und wie kann ich damit weitere Werte bestimmen?« (Thiel-Schneider, 2018, S. 49).

**Lineare Funktionen**

Wie kann ich sich gleichmäßig verändernde Prozesse beschreiben?

**Quadratische Funktionen**

»Wie kann ich krumme Kurven beschreiben?« (Barzel et al., 2016, S. 190)

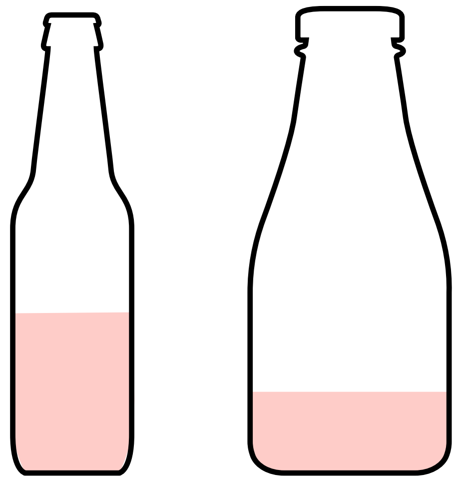
# Sinnstiftender **Kontext**

Ausschnitt aus inner- oder außermathematischer Welt; erfüllt folgende Anforderungen möglichst gut:

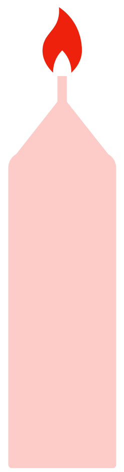
**Lebensweltbezug:** anschlussfähig an Erfahrungen, Interessen, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden

**Kontextauthentizität:** ermöglicht, authentische Fragen zu bearbeiten und etwas über den Kontext zu lernen

**Reichhaltigkeit:** problemhaltig und offen genug, um zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen (vgl. Leuders et al. 2011)



Füllexperimente



Abbrennen einer Kerze

Analyse eines Ballwurfs

# Kernfragen / Kernideen

**Wurzel**

Wie kann ich Quadrieren rückwärts rechnen?

**Term**

Wie kann ich komplizierte Berechnungen übersichtlich darstellen?

# Sinnstiftender **Kontext**

Ausschnitt aus inner- oder außermathematischer Welt; erfüllt folgende Anforderungen möglichst gut:

**Lebensweltbezug:** anschlussfähig an Erfahrungen, Interessen, Denk- und Handlungsmuster der Lernenden

**Kontextauthentizität:** ermöglicht, authentische Fragen zu bearbeiten und etwas über den Kontext zu lernen

**Reichhaltigkeit:** problemhaltig und offen genug, um zum reichhaltigen Fragen und Erkunden anzuregen (vgl. Leuders et al. 2011)

Quadrat mit halben Flächeninhalt finden


Rechentricks

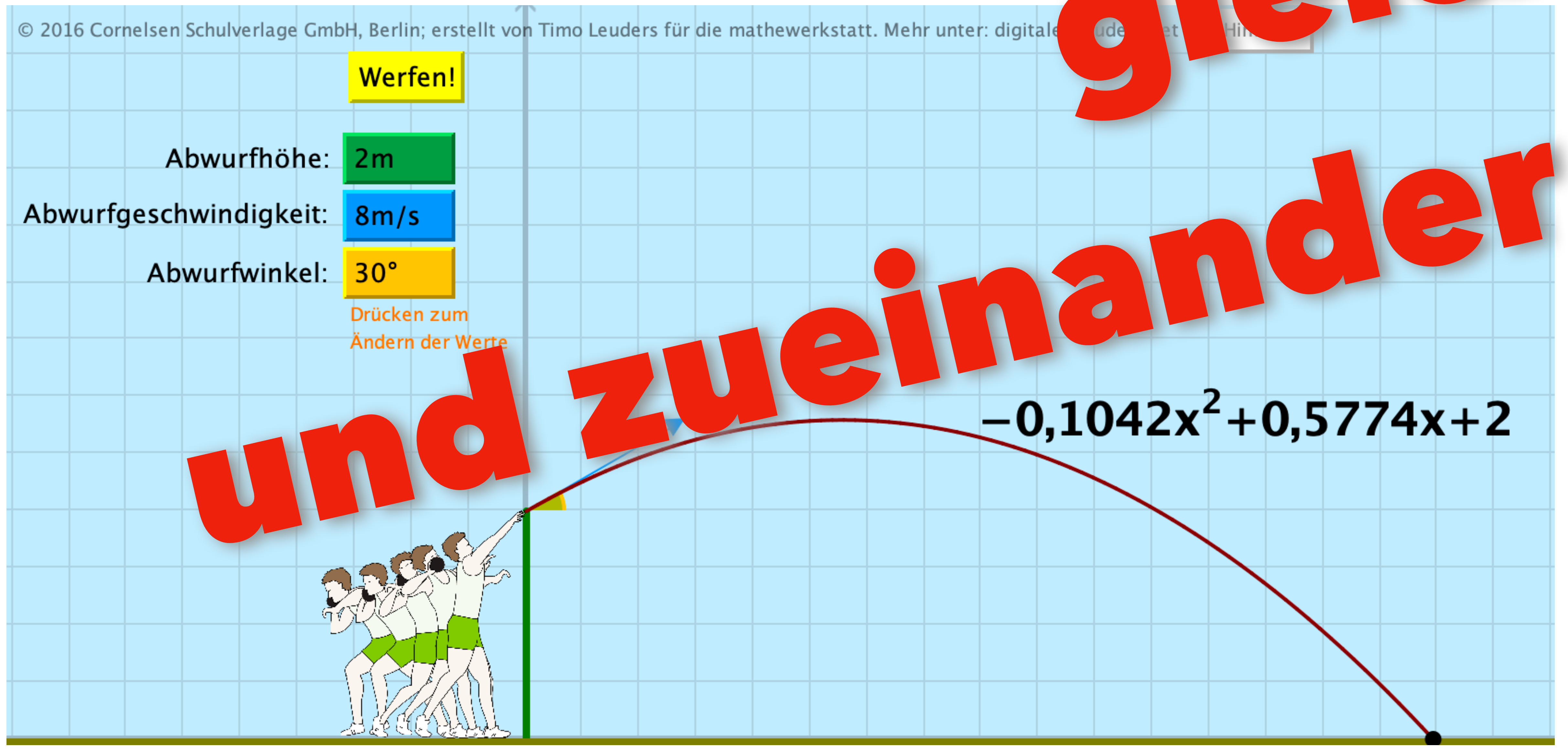
## horizontale Mathematisierung

Beschreiben, Ordnen und Lösen realer Situationen und alltäglicher Probleme mithilfe mathematischer Objekte und Operationen

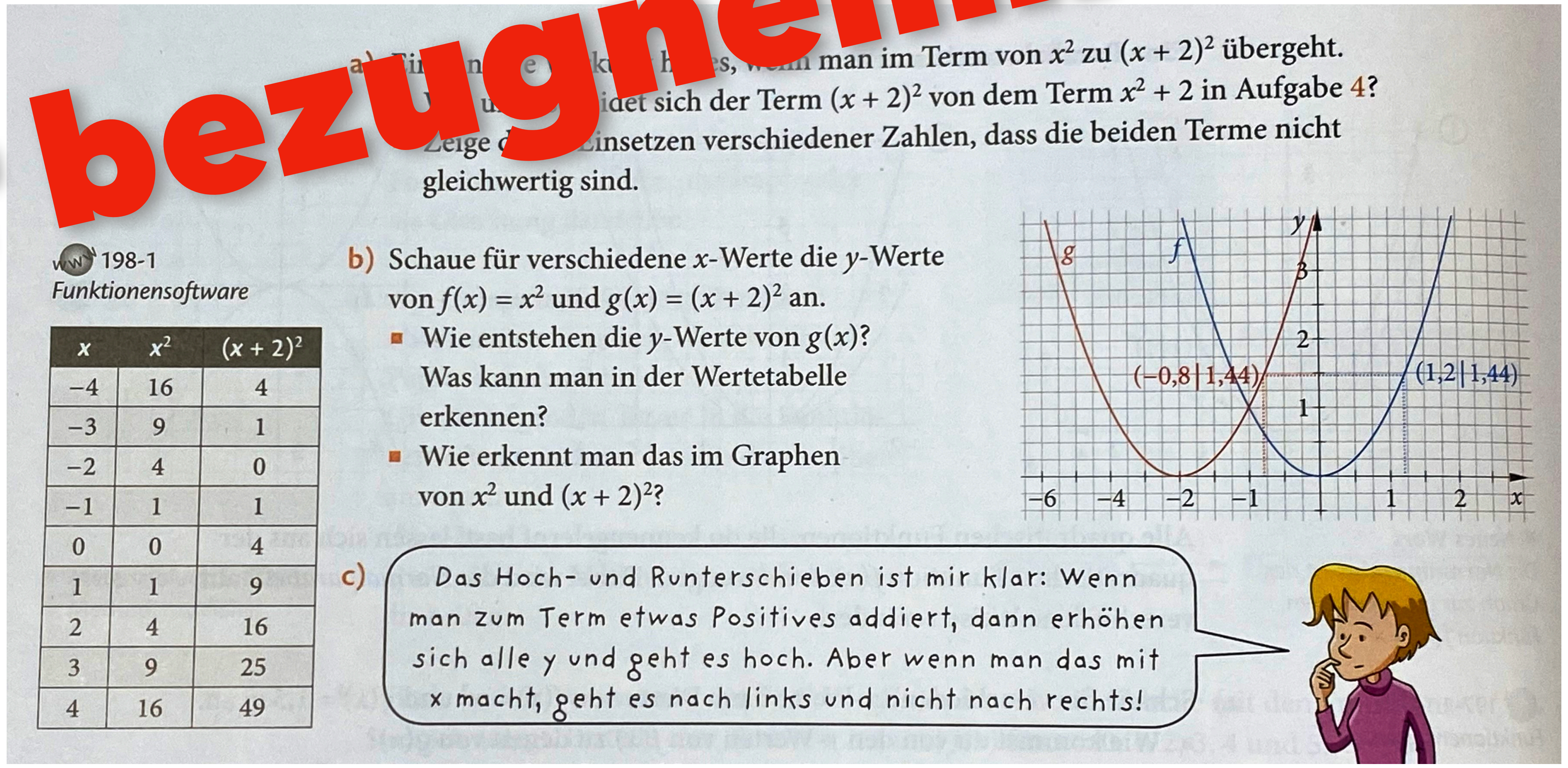
## vertikale Mathematisierung

Reorganisieren und Operieren innerhalb des mathematischen Systems

**beides gleichwertig und zueinander bezugnehmend**




(Barzel et al., 2016, S. 194)




| $x$ | $x^2$ | $(x+2)^2$ |
|---|---|---|
| −4 | 16 | 4 |
| −3 | 9 | 1 |
| −2 | 4 | 0 |
| −1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 4 |
| 1 | 1 | 9 |
| 2 | 4 | 16 |
| 3 | 9 | 25 |
| 4 | 16 | 49 |

(Barzel et al., 2016, S. 198)

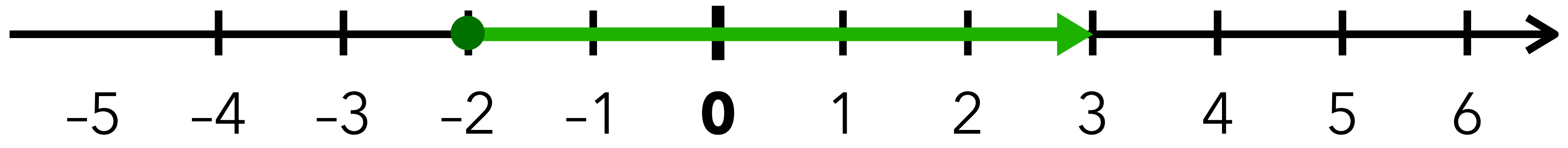
$\mathbb{Z}$

## Formale Grundlagen

- als Zahlenpaar: $[(0,2)] = [(5,7)] \equiv -2$ oder als Gegenzahl: $-2$ vs. $2$
- $n - m$ mit $m > n$ nun lösbar
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
- Rechenregeln nach Permanenzprinzip erweitert

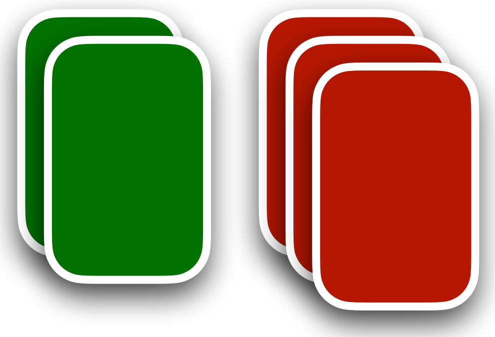
## Fundamentale Ideen

- Vernetzung, Verallgemeinerung, Erweiterung




## Grundvorstellungen

- als relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- als Gegensätze
- als Richtungen
- als Zustände und Zustandsänderungen



## Kernideen / Kernfragen

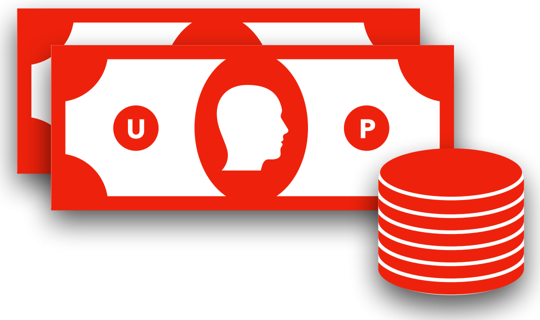
**Vorschauperspektive & Rückschauperspektive**

- Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?
- Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

(Leuders et al., 2015, S. 80, 82)

## Kontexte

**Lebensweltbezug, Kontextauthentizität & Reichhaltigkeit**




## Mathematisierung

**horizontal & vertikal**

- horizontal: z. B. mehrfache Schulden
- vertikal: z. B. Permanzenreihen
- Ergänzung: Blick- und Bewegungsrichtung beim Rechnen auf Zahlenstrahl

**Formale Grundlagen**

**Fundamentale Ideen**

**Grundvorstellungen**

**Kernideen / Kernfragen**

**Vorschauperspektive & Rückschauperspektive**

**Kontexte**

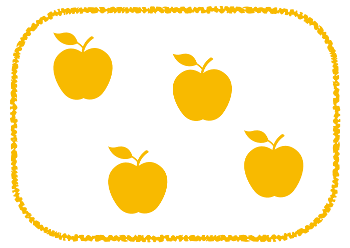
**Lebensweltbezug, Kontextauthentizität & Reichhaltigkeit**

**Mathematisierung**

**horizontal & vertikal**

# Schwierigkeiten und Herausforderungen

- Minus-Zeichens als Vor-, Rechen- und Inversionszeichen    $-5+2$    $7-3$    $-a$
- Kardinalzahlaspekt nicht mehr tragfähig



- Fehlinterpretation der Ordnungsrelation (nicht mehr über Mächtigkeit möglich; fehlerhafte spiegelbildliche Interpretation)    $-5 > -3$
- »negativ« als Wort mit mehreren verschiedenen Bedeutungen (*homonym*)

  negative Stimmung    negativer Corona-Test    negative Zahl

- Generalisierung der Vorstellung »Hinzufügen vermehrt immer«
  - Übertragung von Vorstellung bei Addition als Hinzufügen
  - wird teils auch sprachlich gestützt
- komplexer Wortschatzaufbau, abhängig vom Kontext

  »Obergeschoss«    »Meeresspiegel«    »Plusgrade«

  »Erdgeschoss«    »Normal-Null«    »Gefrierpunkt«

  »Untergeschoss«    »Tauchtiefe«    »Minusgrade«    »Frost«

- Vermischung der Rechenregeln

**bewusste Sprachbildung**

**(wenige) Kontext(e) für Einführung auswählen**

**Kalkül vermeiden**

Formale Grundlagen

Fundamentale Ideen

Grundvorstellungen

Kernideen / Kernfragen

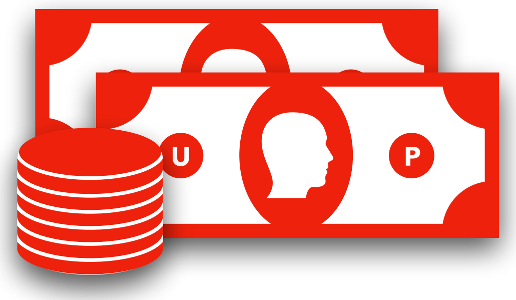
Kontexte

Mathematisierung horizontal & vertikal

Schwierigkeiten und Herausforderungen

All das beeinflusst die Auswahl und Anordnung der Unterrichtsinhalte

# Vorschlag eines Lernpfades zu $\mathbb{Z}$



Erfahrungen zum Umgang mit Guthaben/Schulden → Negative Zahlen als Beschreibungsinstrument für Schulden → Negative Zahlen als neue Zahlen → Repräsentation über Zahlengerade

Zustände und Zustandsänderungen

Gegensätze

relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke

Negative Zahlen als neuer Zahlenbereich

Richtungen

Ordnen und Vergleichen → Addieren/Subtrahieren (horizontal und vertikal) → Multiplizieren (horizontal und vertikal) → Dividieren durch Regelübertragung

Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?

Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

# Literatur


Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2016). *Mathewerkstatt. 9, Schulbuch* (1. Auflage). Cornelsen.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Leuders, T., Hußmann, S., Barzel, B., & Prediger, S. (2011). Das macht Sinn! Sinnstiftung mit Kontexten und Kernideen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *53*(37), 2–9. https://www.researchgate.net/publication/233978329

Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2015). *Mathewerkstatt. 7, Schulbuch* (1. Auflage). Cornelsen.

Thiel-Schneider, A. (2018). Spezifizierung und Strukturierung des Lerngegenstandes. In A. Thiel-Schneider, *Zum Begriff des exponentiellen Wachstums* (S. 23–57). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-21895-9_4