Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 5 – Arbeitsmittel

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 5 – Arbeitsmittel

- Sie können Arbeitsmittel über Anschaulichkeit, Abstraktheit und Operierbarkeit charakterisieren.
- Sie kennen einen Ablauf zur Ausbildung von Grundvorstellungen mithilfe von Arbeitsmitteln. Dabei sind Sie sich der besonderen Bedeutung des Sprechens über Handlungen bewusst.
- Sie können lerntheoretisch den Einsatz von Arbeitsmitteln bei der Aneignung von Lerngegenständen über Internalisierungs- und Externalisierungsprozesse erläutern.

Grundvorstellungen ausbilden

1	*Das Kind handelt am geeigneten Material.* Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.
2	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.* Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.* Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.
4	*Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.* Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

(Wartha & Schulz, 2011, S. 11)

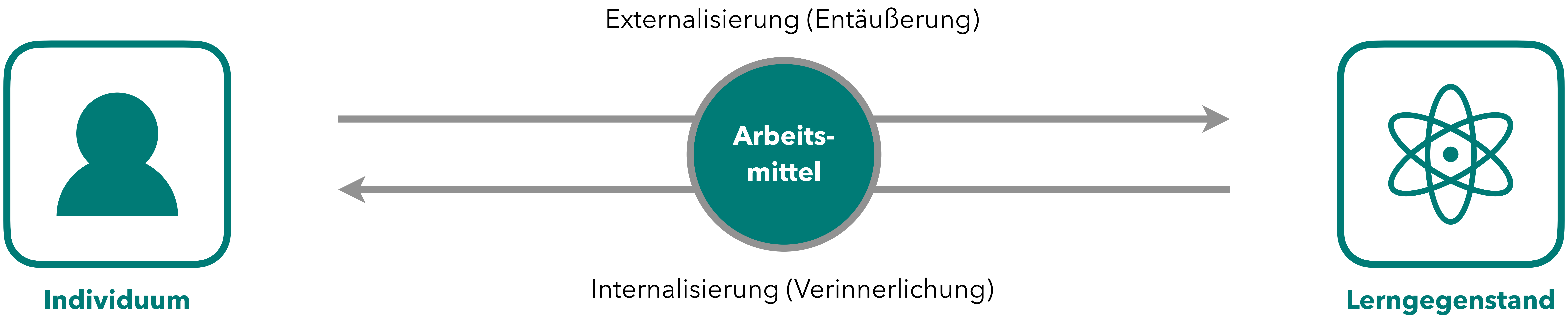
»geeignetes Material«

»geeignetes Material«

Aneignung als Einheit aus Externalisierung und Internalisierung

(Wygotski, 1985; Kölbl, 2006, S. 45 ff.)

Arbeitsmittel



abstrakt

enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

anschaulich

macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich

operierbar

ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

Arbeitsmittel

Ein **Arbeitsmittel** ist eine **materielle oder materialisierte sowie** durch die Schülerinnen und Schüler **operierbare Repräsentation** eines Lerngegenstands. Damit muss ein Arbeitsmittel folgende Bedingungen erfüllen:

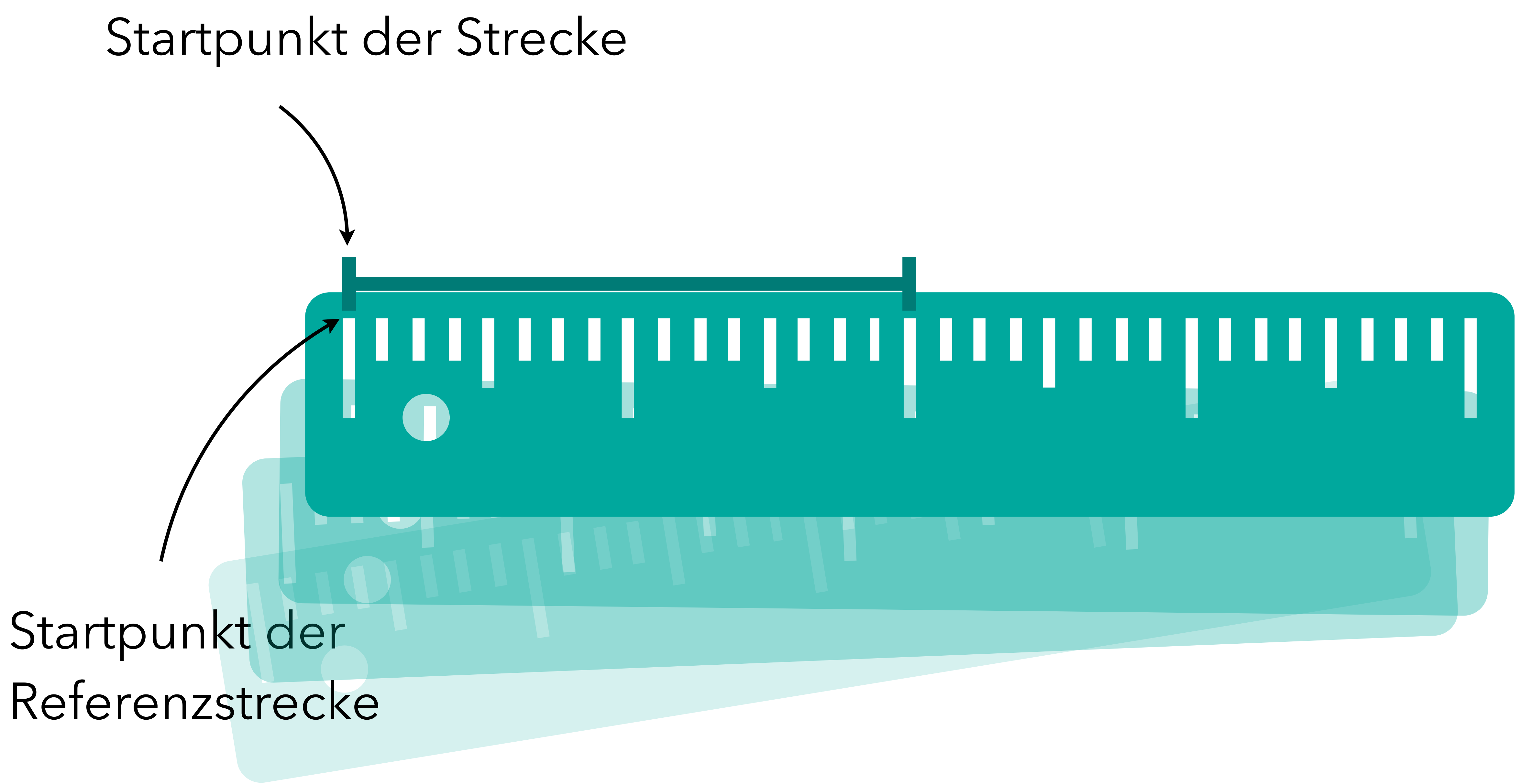
- Es enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen **(Abstraktheit)**.
- Es macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich **(Anschaulichkeit)**.
- Es ermöglicht, Lernhandlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind **(Operierbarkeit)**.

Arbeitsmittel

Beispiel: Längenmessung

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Messen einer Stecke als Vergleichen zu einer Referenzstrecke



Handlungen:

- Startpunkte aufeinanderführen
- Strecken gleichartig ausrichten
- Vergleichen durch Ablesen

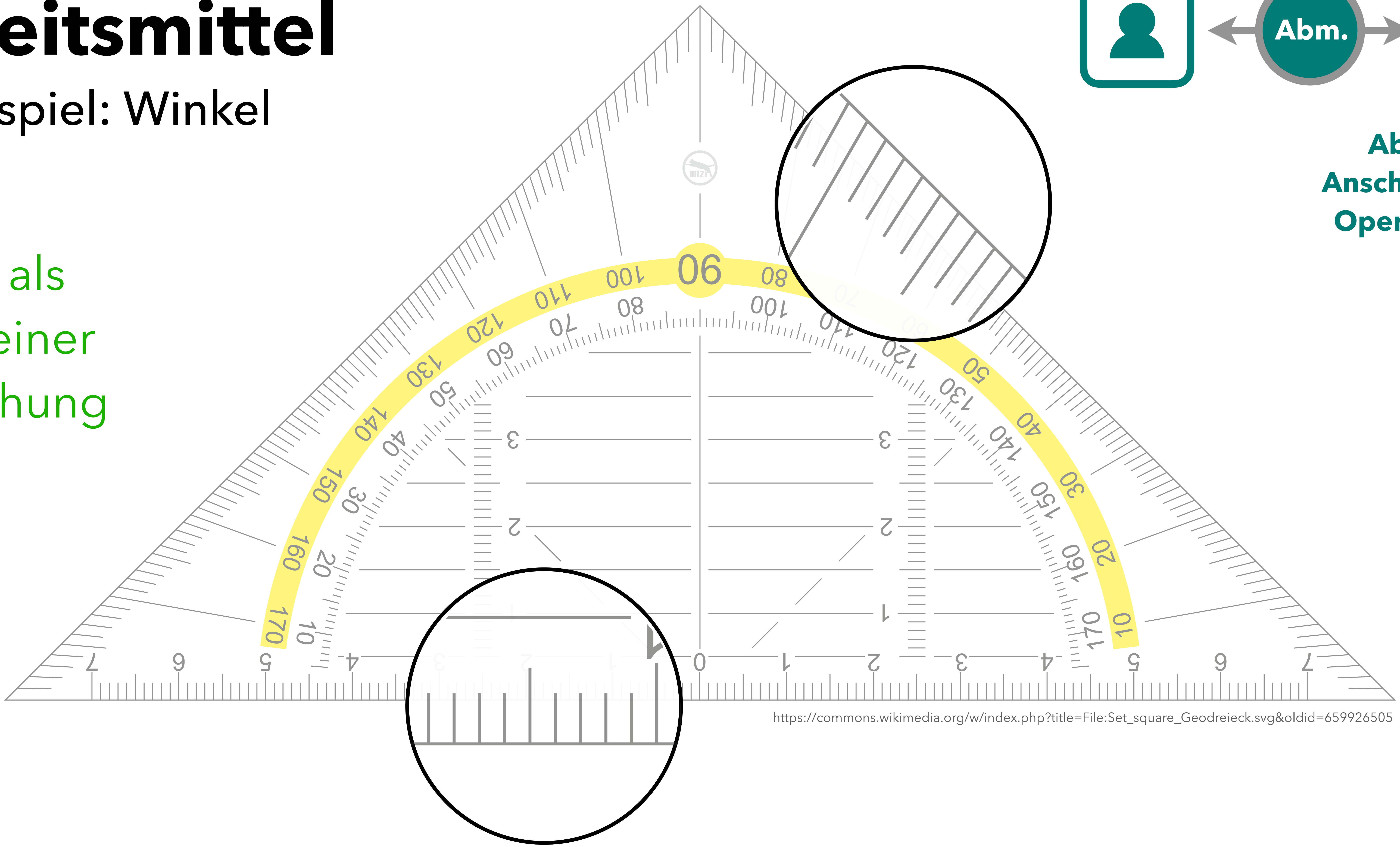
Arbeitsmittel

Beispiel: Winkel

Abm.

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Winkel als Weite einer Umdrehung



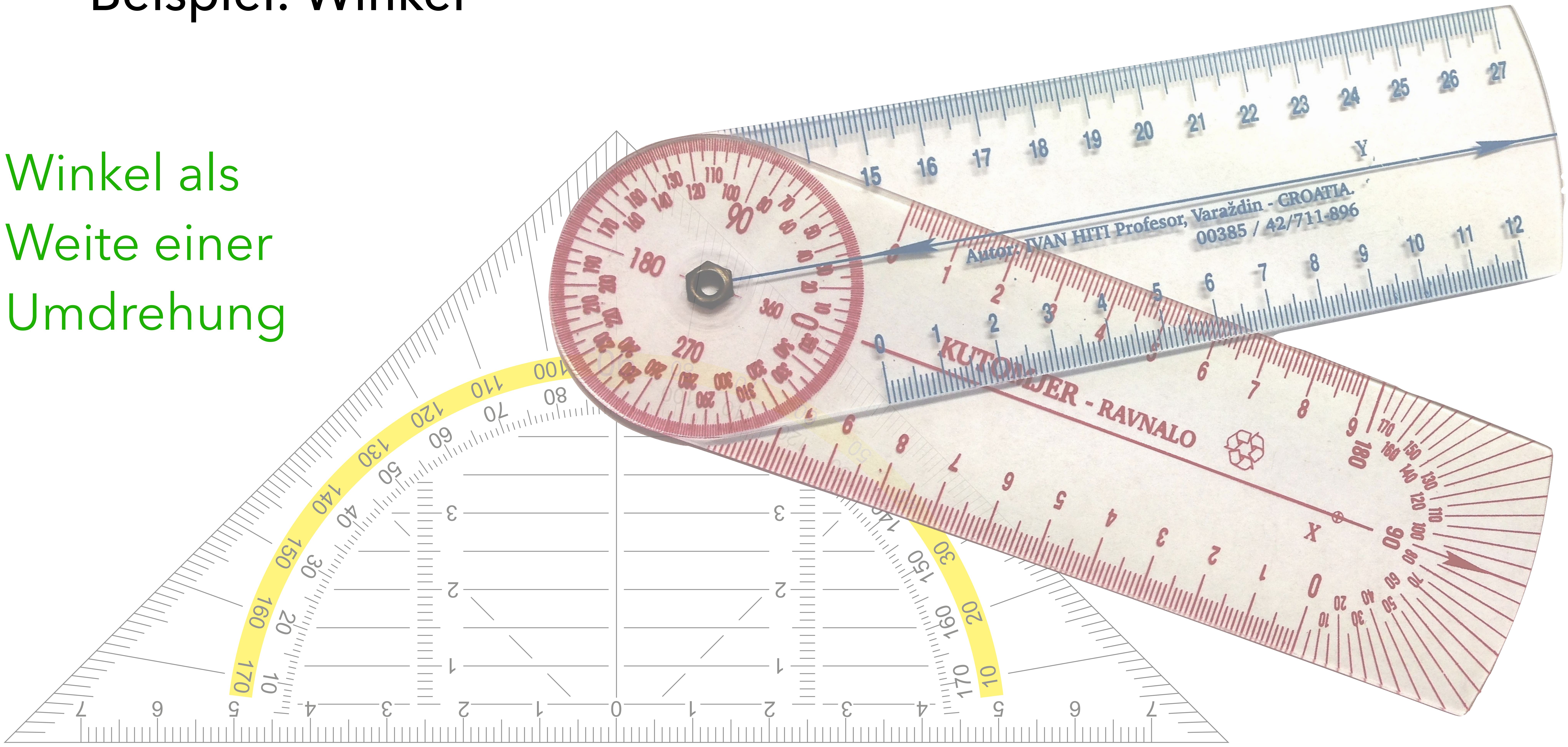
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Set_square_Geodreieck.svg&oldid=659926505

Arbeitsmittel

Beispiel: Winkel

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Winkel als Weite einer Umdrehung



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Set_square_Geodreieck.svg&oldid=659926505

Gleichungen

→ **Objekt »Gleichung«**

→ Lösen von Gleichungen

Operationale Grundvorstellung

Gleichung als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung

Gleichheitszeichen als »ergibt«-Zeichen

$2 + 3 = 5$ $\quad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Relationale Grundvorstellung

Gleichung als Anlass, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten denselben Wert besitzen

Gleichheitszeichen als Relationszeichen,
Variable als Unbekannte

$2x + 1 = 7$

Funktionale Grundvorstellung

Gl. als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Funktionstermen

Gleichheitszeichen als Relationszeichen,
Variablen als Veränderliche

$x + 1 = -3x$

Objekt-Grundvorstellung

Gleichung als ein Objekt, das charakteristische Eigenschaften hat

$x^2 + y^2 = r^2$

(Weigand et al., 2022, S. 257 f.)

Gleichungen

Objekt »Gleichung«

Lösen von Gleichungen

Operationale Grundvorstellung
Gleichung als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung

$$2+3=5$$

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$$

»Rückwärtsrechnen«

Relationale Grundvorstellung
Gleichung als Anlass, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten denselben Wert besitzen

$$2x+1=7$$

Äquivalenzumformungen

Funktionale Grundvorstellung
Gl. als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Funktionstermen

$$x+1=-3x$$

Schnittpunkt suchen

Objekt-Grundvorstellung
Gleichung als ein Objekt, das charakteristische Eigenschaften hat

$$x^2+y^2=r^2$$

Koordinaten prüfen

(Weigand et al., 2022, S. 257 f.)

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Was ist eine Gleichung?

$$2 + 3 = 8 \qquad 2x = 14 \qquad T_1(x) = T_2(x)$$

Aussage **Aussageform**

Was ist die Lösung einer Gleichung?

$$\frac{7}{x} = 2$$

Grundmenge $\mathbb{G}$	$\mathbb{Z}$
Definitionsmenge $\mathbb{D}$	$\mathbb{Z}\backslash\{0\}$
Lösungsmenge $\mathbb{L}$	$\{\ \}$

Ein Wert $x_0 \in \mathbb{D}$ heißt Lösung einer Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$, wenn $T_1(x_0) = T_2(x_0)$ eine wahre Aussage ist. Die Menge aller Lösungen wird Lösungsmenge genannt. Sie ist eine Teilmenge der Definitionsmenge.

Was ist eine Äquivalenzumformung?

Jede Anwendung einer **injektiven Funktion** auf **beide Seiten einer Gleichung** verändert nicht die Lösungsmenge der Gleichung und wir daher als **Äquivalenzumformung** bezeichnet.

Lösungsmengenäquivalenz: Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

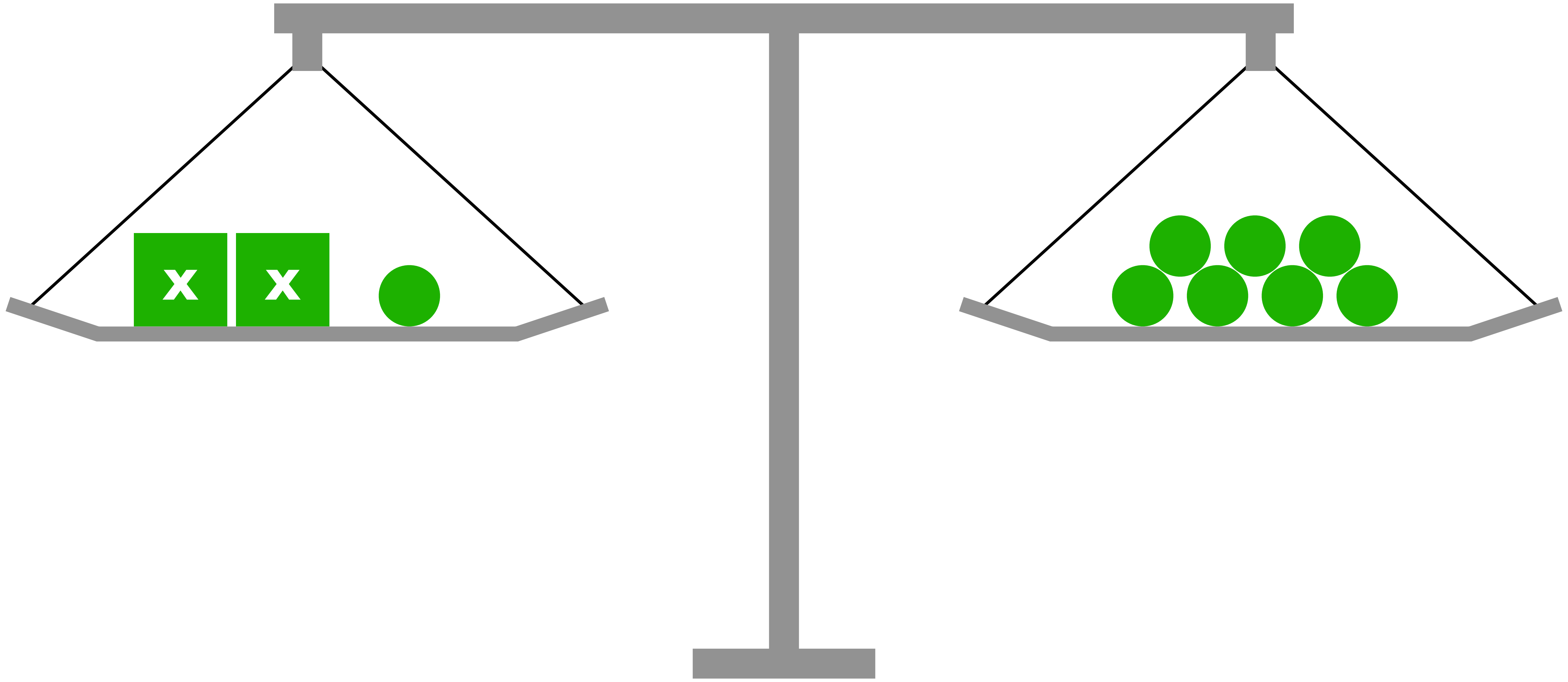
Umformungsäquivalenz: Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie durch Äquivalenzumformungen ineinander übergehen.

(Weigand et al., 2022, S. 242 ff.)

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= 7 \qquad && | -1 \\
2x &= 6 && | : 2 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

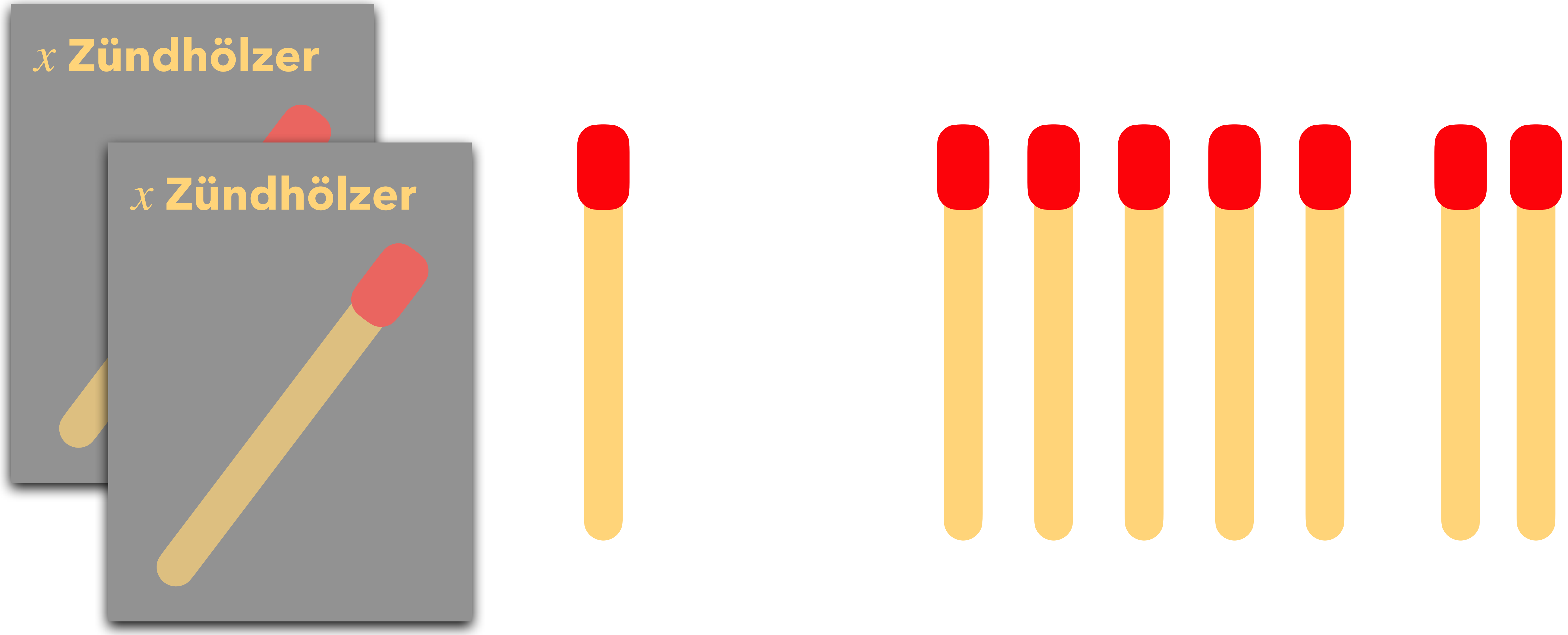


- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= 7 \qquad &&| -1 \\
2x &= 6 \qquad &&| : 2 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

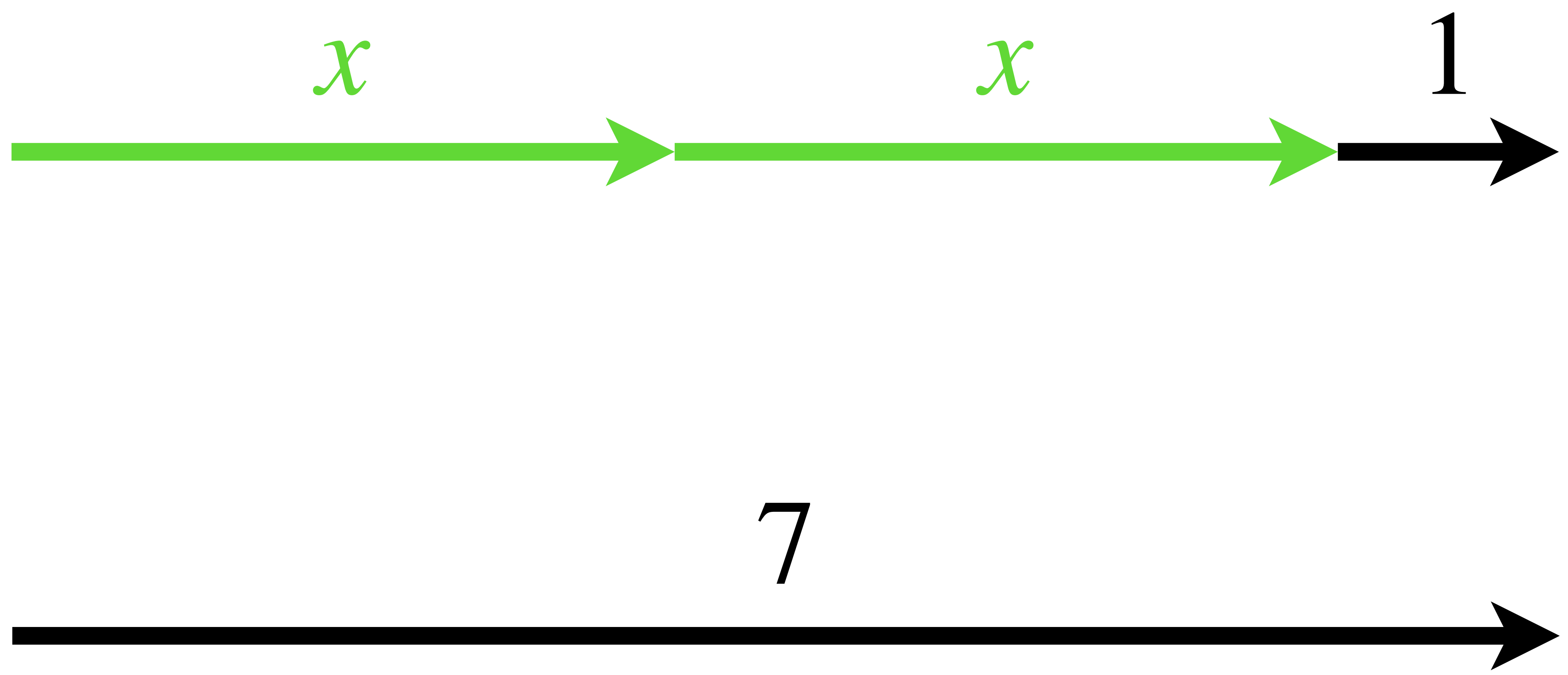


- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= 7 \qquad &&|-1 \\
2x &= 6 \qquad &&|:2 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

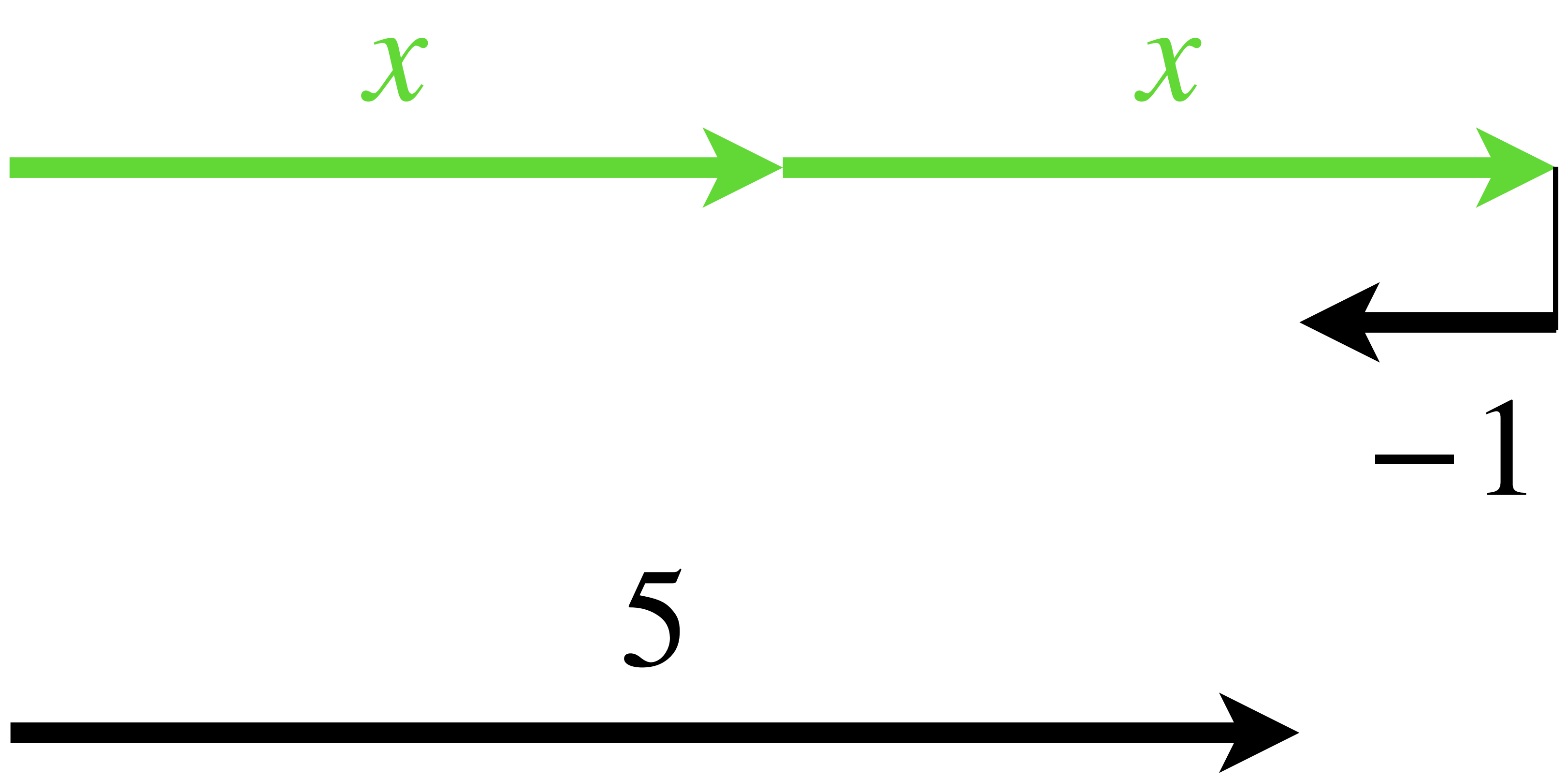


- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$2x - 1 = 5$$



- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Literatur

Dohrmann, C., & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 29–42). https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6

Kölbl, C. (2006). *Die Psychologie der kulturhistorischen Schule: Vygotskij, Lurija, Leont'ev*. Vandenhoeck & Ruprecht.

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. IPN Kiel. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1

Wygotski, L. (1985). *Lew Wygotski. Ausgewählte Schriften* (Bd. 1). Volk und Wissen.