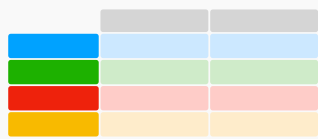


Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 13 – Beispiel: Flächeninhalt

Ziel: Auswahl und Anordnung von Lerngegenständen



Stoffdidaktische Analyse

formale Ebene

Welche fachlich-logische Struktur besitzt der Lerngegenstand und welche Inhalte werden ausgewählt?

semantische Ebene

Welchen Sinn und welche Bedeutung hat der mathematische Gegenstand?

konkrete Ebene

Wie kann die Umsetzung des Lehr-Lern-Prozesses an konkreten Situationen gestaltet werden, so dass mathematisches Wissen konstruiert wird?

empirische Ebene

Inwieweit können kognitive und ggf. soziale Aspekte der Schülerinnen und Schüler in die stoffdidaktische Analyse integriert werden?

Ziel: Gestaltung des Lernprozesses



Typische Unterrichtssituationen

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung** mit **sinnstiftendem Kontext**; bewusste **Lernzielbildung**, z. B. über **Kernfragen**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren** von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten

Stoffarbeitung

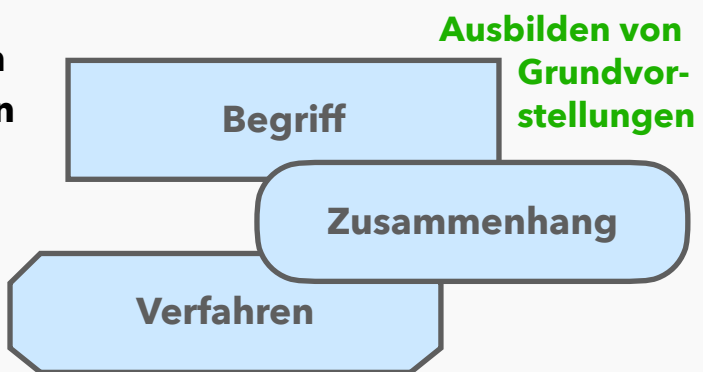
Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen** schaffen und **Aneignungshandlungen** **etappenweise Vverinnerlichen**

Festigung

vielfältiges **Übungen** und komplexes **Anwenden**

Kontrolle und Bewertung

Abgleich zwischen Handlungsverlauf, Handlungsergebnis und Lernziel, z. B. über Betrachtung der **Kernidee in der Rückschauerspektive**



Der Flächeninhalt einer Figur ist ein **nichtnegatives Maß**, wobei zwei **zueinander kongruenten Figuren dasselbe Maß** zugeordnet wird und der Flächeninhalt einer Figur gleich der **Summe der Flächeninhalte ihrer Teilfiguren** ist. Hinzu wird das Flächeninhaltsmaß eines Quadrates der Seitenlänge 1 LE auf 1 LE^2 festgelegt.

Flächeninhalt
mithilfe einer Zahl
objektivieren

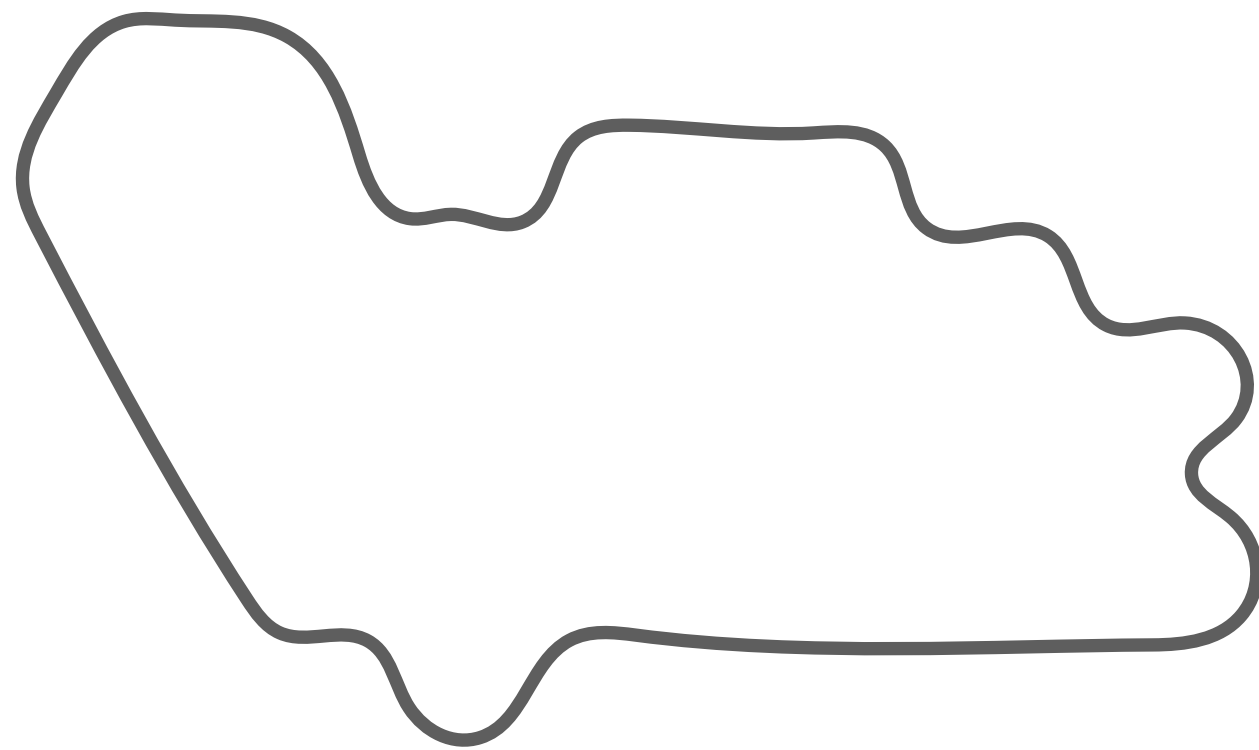
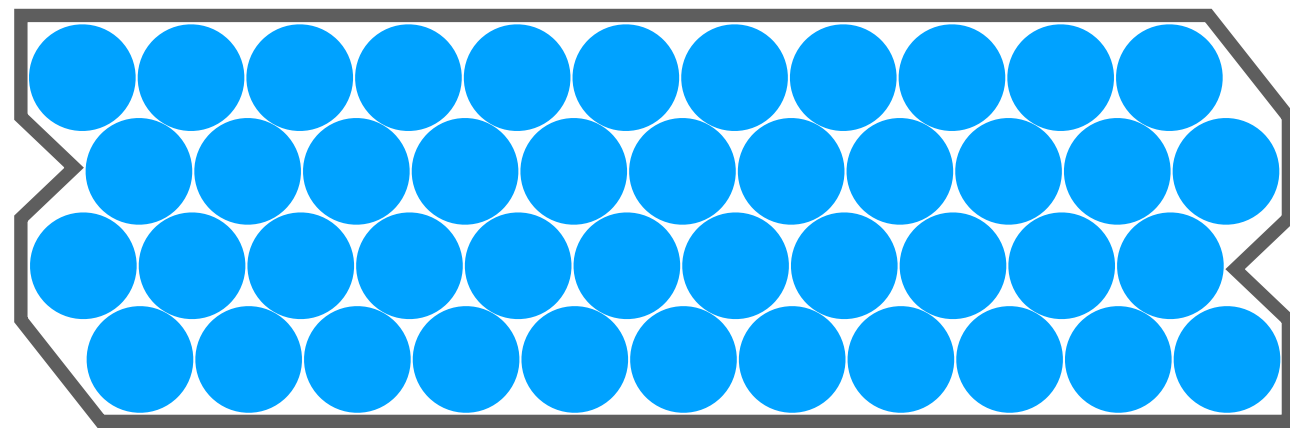
Flächenvergleich
ohne explizites Maß
möglich

»Willkürlichkeit« des
Vergleichsmaßes

(vgl. Kuntze, 2018, S. 161)

- Vergleichen verschiedener Flächen durch Zerlegen, Ergänzen und Übereinanderlegen
- Bestimmen des Maßes einer Fläche über Auszählen mittels eines (allg.) Vergleichsmaßes
- Nutzen eines quadratischen Vergleichsmaßes, in der Regel 1 cm^2

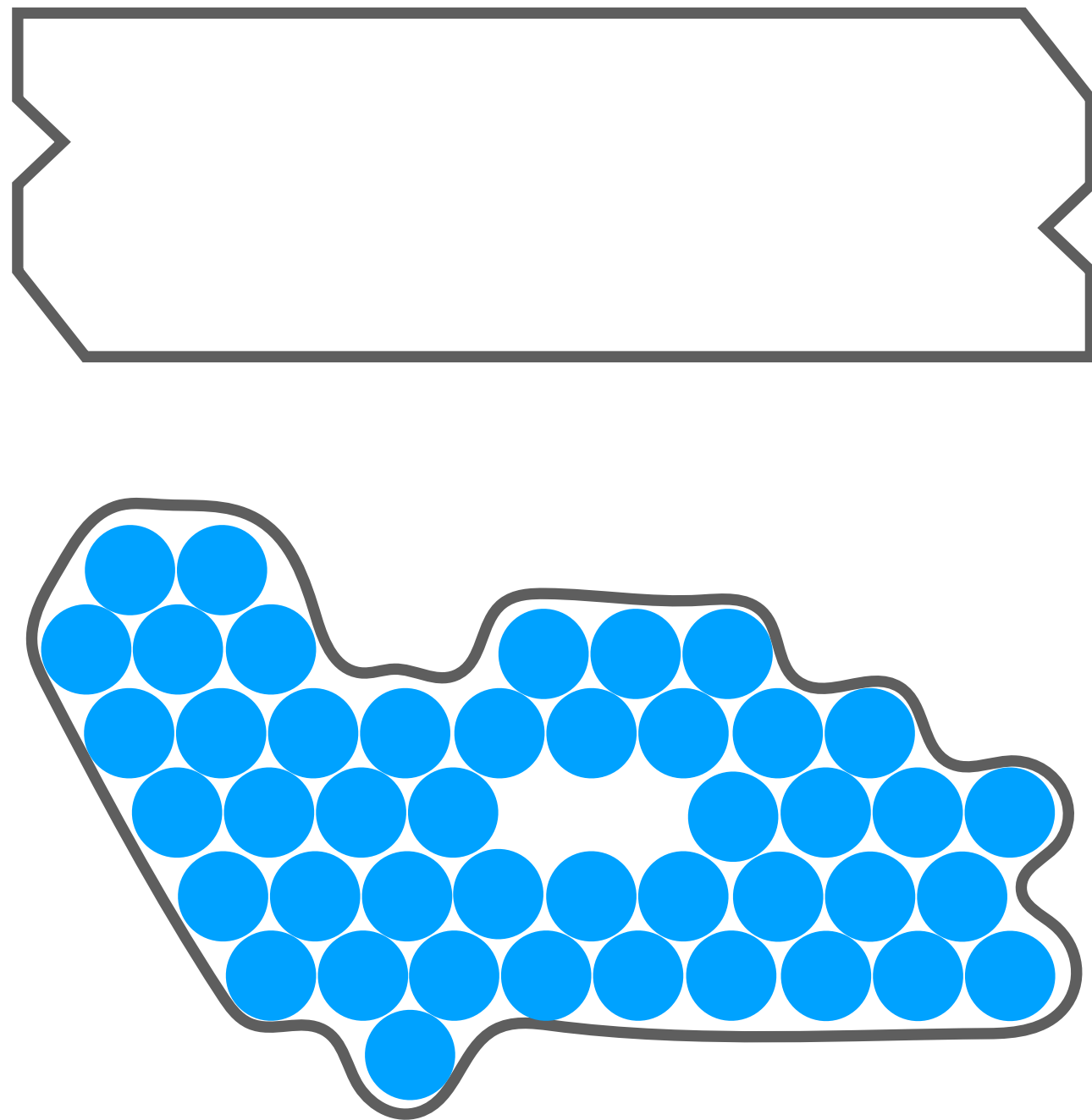
(vgl. Wörner, 2014, S. 1328 f.)



(vgl. Kuntze, 2018, S. 161)

- Vergleichen verschiedener Flächen durch Zerlegen, Ergänzen und Übereinanderlegen
- Bestimmen des Maßes einer Fläche über Auszählen mittels eines (allg.) Vergleichsmaßes
- Nutzen eines quadratischen Vergleichsmaßes, in der Regel 1 cm^2

(vgl. Wörner, 2014, S. 1328 f.)



(vgl. Kuntze, 2018, S. 161)

- Vergleichen verschiedener Flächen durch Zerlegen, Ergänzen und Übereinanderlegen
- Bestimmen des Maßes einer Fläche über Auszählen mittels eines (allg.) Vergleichsmaßes
- Nutzen eines quadratischen Vergleichsmaßes, in der Regel 1 cm^2

(vgl. Wörner, 2014, S. 1328 f.)

Fundamentale Idee »Messen«

Horizontalkriterium Vertikalkriterium Zeitkriterium Sinnkriterium

Geometrie (Flächeninhalt)	Arithmetik (Brüche)	Stochastik (Erwartungswert)	Analysis (Integral)	Physik (Größen)	Sozialwissenschaften (quant. Forschung)	Medizin (Pulsschlag)
------------------------------	------------------------	--------------------------------	------------------------	--------------------	--	-------------------------

Ableitung, Integral	Pythagoras »Alles ist Zahl!«	Vereinheitlichung von Maßeinheiten
Flächenverwandlungen/Approximation		
Längen/Flächen/Volumina	Triangulation »Vermessung der Welt«	»Quadratur des Kreises«
Abzählen		

(Vohns, 2000)

Grundvorstellungen

Maßzahlaspekt

Flächeninhalt einer Figur als nichtnegative Maßzahl, die mittels normierter Flächeninhaltsmaße bestimmt wird

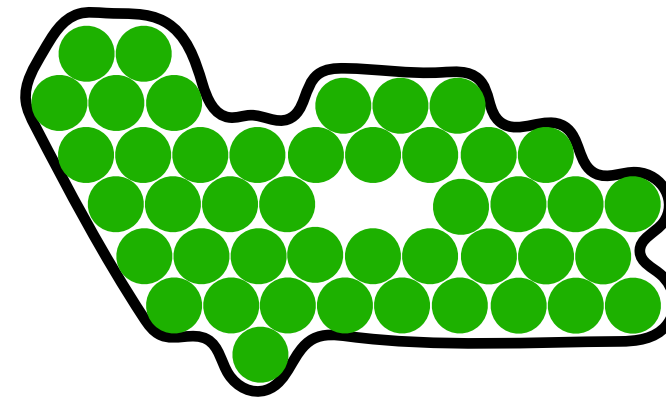
Vereinigungsaspekt

Flächeninhalt einer Figur als Summe der Flächeninhalte der Teilfiguren, aus denen sich die Figur zusammensetzen lässt

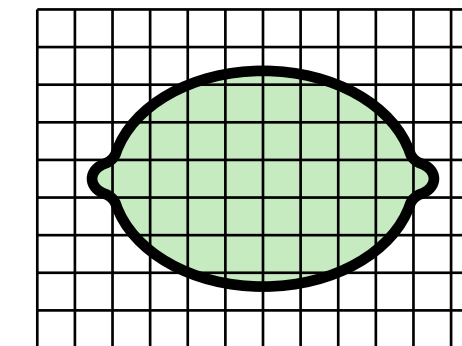
Kongruenzaspekt

Flächeninhalt einer Figur als invariante Eigenschaft bei Kongruenzabbildungen

Handlungserfahrungen

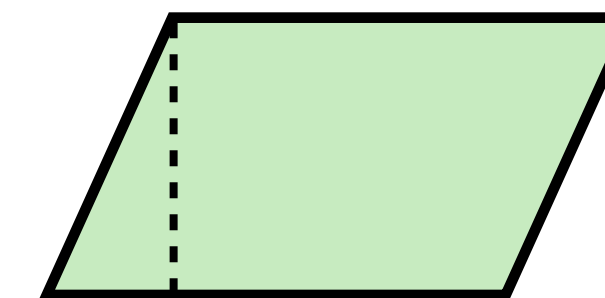


Repräsentationen

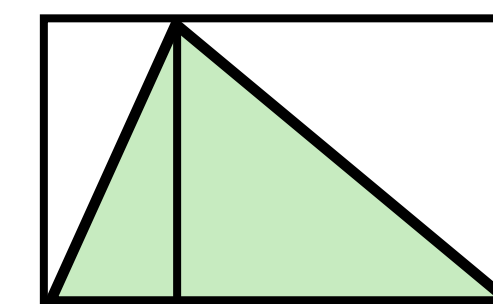


Anwendung auf Realität

Bestimmen der Größe eines Fußballfeldes



Bestimmen der Größe eines Landes



Bestimmen des Oberflächeninhalts eines Prismas

(angelehnt an Wörner, 2014)

Kontexte und Kernideen/Kernfragen

**Lebensweltbezug,
Kontextauthentizität &
Reichhaltigkeit?**

Zoogehege

**Vorschauperspektive &
Rückschauperspektive**

- Wie kann ich die Größe von Flächen vergleichen?
- Wie kann ich die Größe einer Fläche geschickt bestimmen?

(Barzel et al., 2012c, S. 170 f.)

Typische Schwierigkeiten

Flächeninhalt – Umfang – Volumen

Fläche – Flächeninhalt

(vgl. Kuntze, 2018, S. 159 f.)

(Barzel et. al, 2012a, S. 362)

Beschreibe die Umsetzung einer der typischen Unterrichtssituationen im Schulbuch *mathewerkstatt*.

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung** mit **sinnstiftendem Kontext**; bewusste **Lernzielbildung**, z. B. über **Kernfragen**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren** von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten

Stoffearbeitung

Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen** schaffen und **Aneignungshandlungen** **etappenweise verinnerlichen**

Ausbilden von Grundvorstellungen

Begriff

Zusammenhang

Verfahren

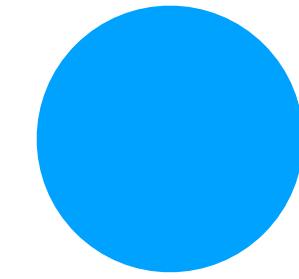
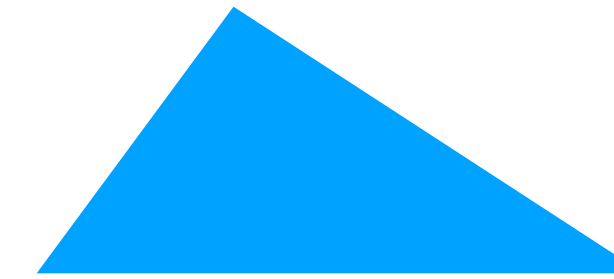
Festigung

vielfältiges **Üben** und komplexes **Anwenden**

Kontrolle und Bewertung

Abgleich zwischen Handlungsverlauf, Handlungsergebnis und Lernziel, z. B. über Betrachtung der **Kernidee in der Rückschauerspektive**

Flächeninhaltsformeln



Leitidee Messen

Flächeninhalt im Dreieck

Das brauchst du:

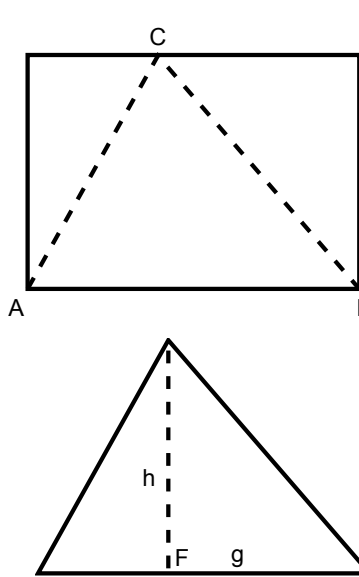
✓ 3 DIN-A5-Blätter

✓ Schere

Vorbereitung

Lege zunächst das Blatt im Querformat vor dich hin. Die linke und rechte untere Ecke sind die Punkte A und B. Markiere an der oberen Seite einen beliebigen Punkt C und schneide das Dreieck ABC aus.

Die Seite $\overline{AB}$ ist die Grundseite des Dreiecks und wird mit g bezeichnet. Falte zur Grundseite g die Höhe h. Der entstehende Fußpunkt wird mit F bezeichnet.



Aufgaben

- Falte alle drei Ecken auf F. Welche Figur entsteht?
Es entsteht ein
- a) Beschrifte in der rechts stehenden Figur die Seitenlängen in Abhängigkeit von g und h (also als Vielfaches oder Teil davon).
b) Gib den Flächeninhalt der Figur an.
 $A = \dots \cdot \dots$
- a) Wie oft passt die Fläche A der Figur in die Dreiecksfläche A_{Dreieck} ? Begründe.
.....
.....
b) Ergänze die Formel: $A_{\text{Dreieck}} = \dots \cdot A = \dots \cdot \dots = \dots \cdot g \cdot h$
- Erstelle noch zwei weitere Dreiecke, sodass du am Ende ein rechtwinkliges, ein stumpfwinkliges und ein spitzwinkliges Dreieck hast. Wiederhole die Faltungen und überprüfe die Gültigkeit deiner gefundenen Formel aus 3b).

rechtwinkliges Dreieck	stumpfwinkliges Dreieck	spitzwinkliges Dreieck
☐ Formel stimmt	☐ Formel stimmt	☐ Formel stimmt
☐ Formel stimmt nicht	☐ Formel stimmt nicht	☐ Formel stimmt nicht

44

Mathe verstehen durch Papierfalten

© Verlag an der Ruhr | Etzold, Petzschler | ISBN 978-3-8346-2626-4 | www.verlagruhr.de

Leitidee Messen

Flächeninhalt im Trapez

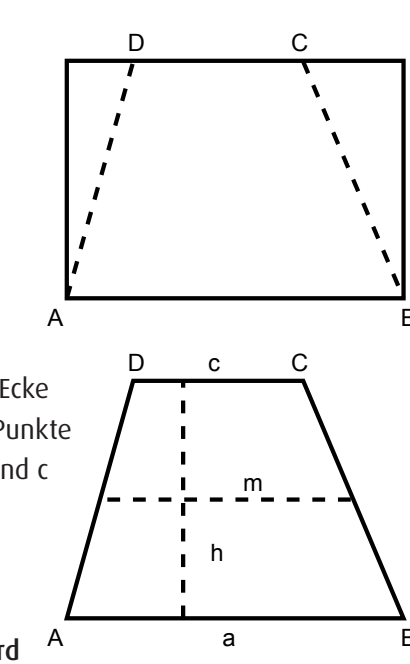
Das brauchst du:

✓ DIN-A5-Blatt

✓ Schere

Vorbereitung

Lege das Blatt im Querformat vor dich hin. Die linke und rechte untere Ecke sind die Punkte A und B. Markiere an der oberen Seite zwei beliebige Punkte D und C und schneide das Trapez ABCD aus. Der Abstand der Seiten a und c heißt Höhe h. Falte diese.



Aufgaben

- Falte die Seite c auf die Seite a. Die so entstandene Mittellinie wird mit m bezeichnet. Lasse c auf a und falte dann den Punkt A auf D und den Punkt B auf C. Welche Figur entsteht?
Es entsteht ein
- Begründe, dass die untere Seite der Figur halb so lang wie a + c ist, also dass $m = \frac{a+c}{2}$ ist.
.....
.....
.....
- Beschrifte die Seitenlängen in Abhängigkeit von m und h (also als Vielfaches oder Teil davon).
- Gib den Flächeninhalt der Figur an: $A = \dots \cdot \dots$
- a) Wie oft passt die Fläche A der Figur in die Trapezfläche A_{Trapez} ? Begründe.
.....
.....
b) Ergänze die Formel: $A_{\text{Trapez}} = \dots \cdot A = \dots \cdot \dots = \dots \cdot \dots$
- Nutze dein Ergebnis von Aufgabe 2 zur Darstellung der Trapezformel abhängig von a, c und h.
 $A_{\text{Trapez}} = \frac{+}{2} \cdot \dots$

45

Mathe verstehen durch Papierfalten

© Verlag an der Ruhr | Etzold, Petzschler | ISBN 978-3-8346-2626-4 | www.verlagruhr.de

Leitidee Messen

Flächeninhalt im Parallelogramm

Das brauchst du:

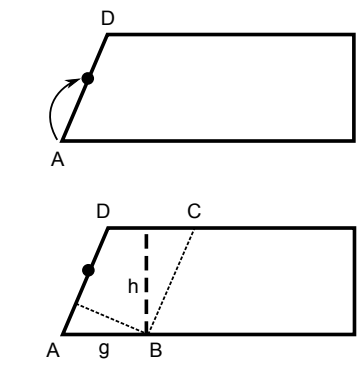
✓ DIN-A5-Blatt

✓ Schere

Vorbereitung

Halbiere zunächst das DIN-A5-Blatt, sodass ein schmaler Streifen entsteht. Lege das Blatt quer vor dich hin. Falte links eine schräge Kante und schneide diese ab. Die linke, untere Ecke heißt A, oben links entsteht der Punkt D. Falte A irgendwo auf die Kante $\overline{AD}$. Es entsteht rechts unten der Punkt B.

Den restlichen Streifen von rechts faltest du auf die schräg liegende Kante AB. Zeichne die letzte Faltkante nach, oben rechts entsteht der Punkt C. Die Strecke $\overline{AB}$ heißt Grundseite und wird mit g bezeichnet. Falte nun noch die Höhe h des Vierecks auf g durch B.



Aufgaben

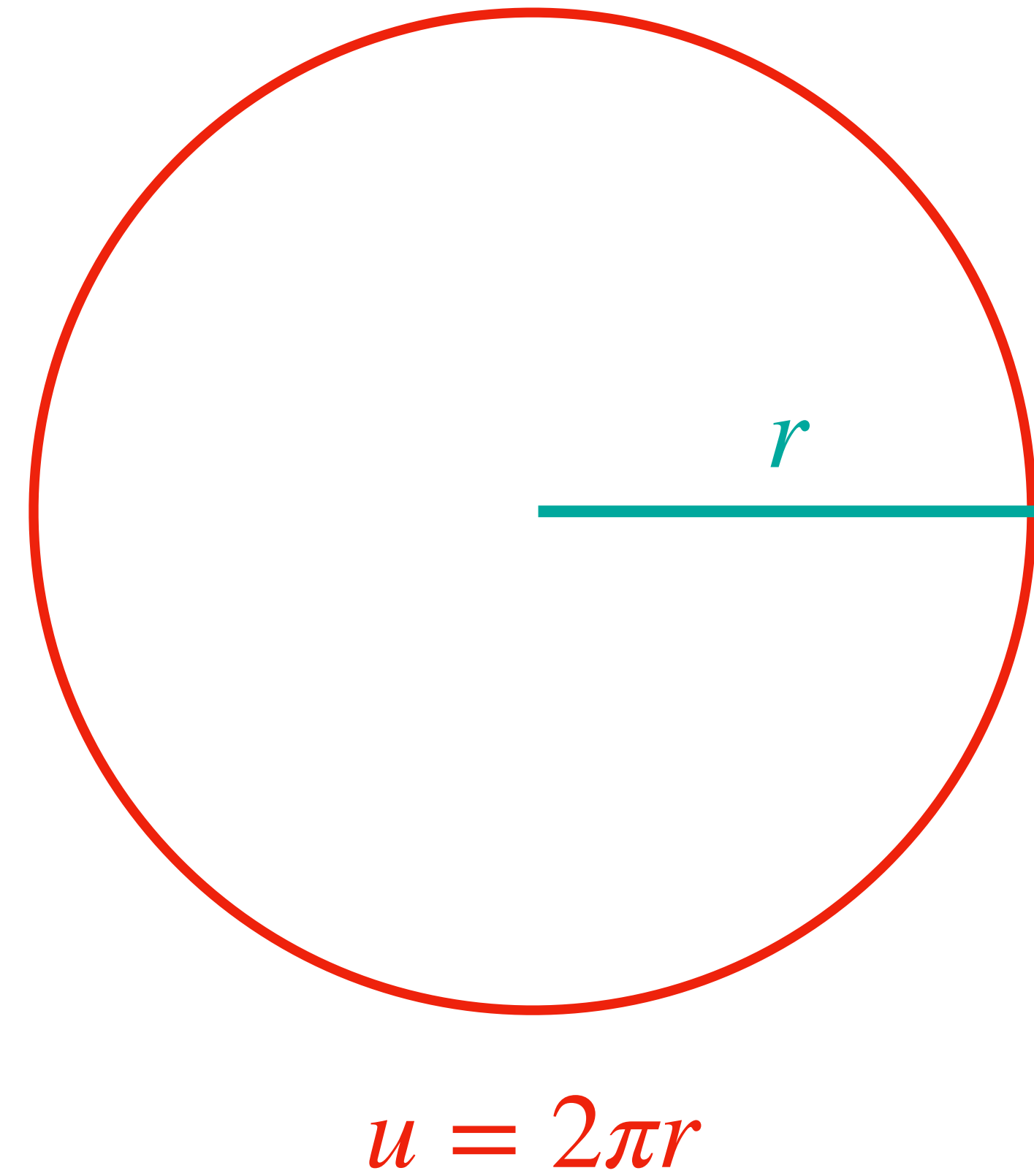
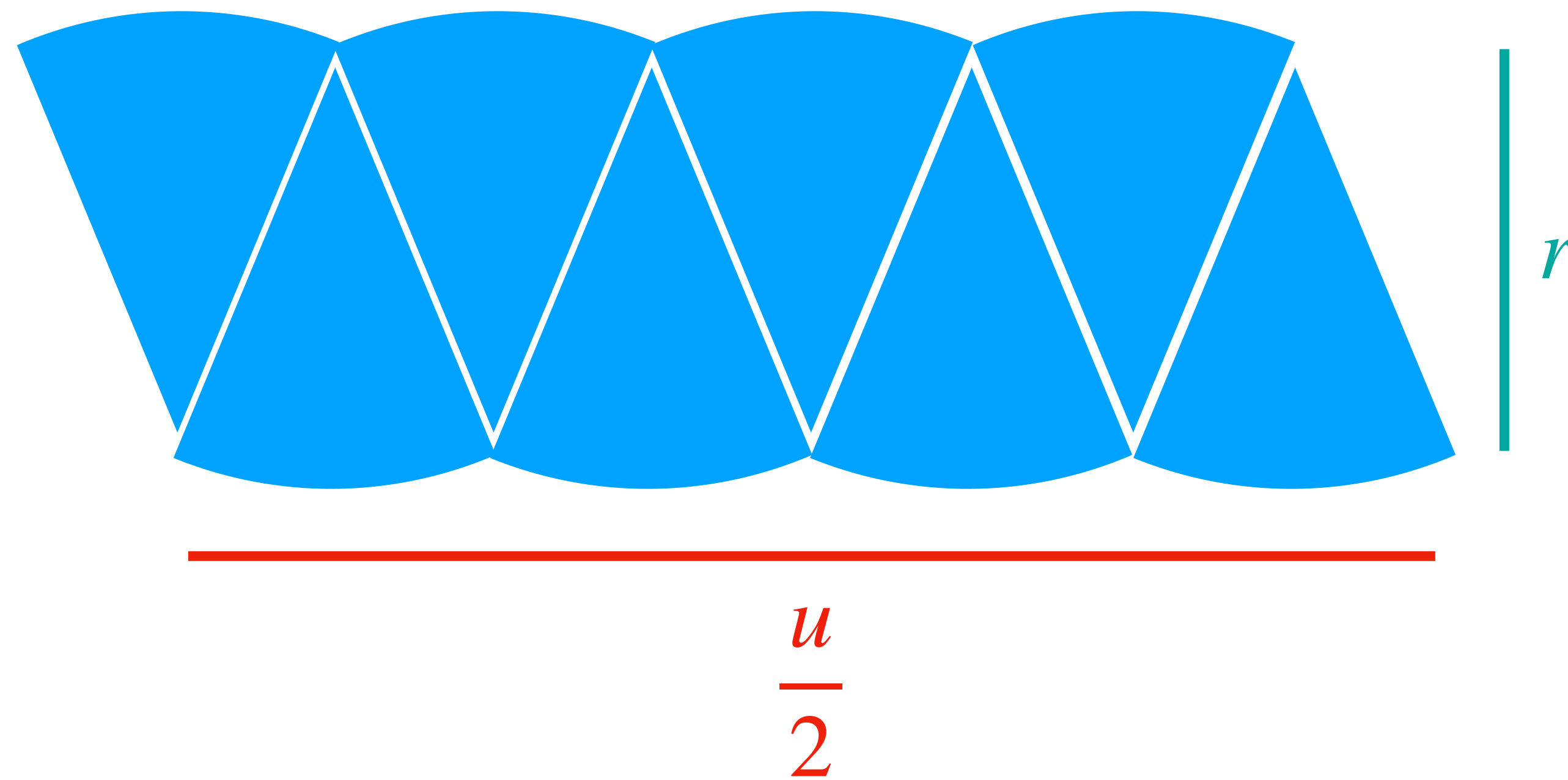
- Schneide das Viereck ABCD aus. Welche Figur liegt nun vor dir?
Das Viereck ABCD ist ein
- Schneide zusätzlich das rechte Dreieck ab und lege es links wieder an. Welche Figur entsteht?
Es entsteht ein
- Beschrifte die Seitenlängen der so entstandenen Figur in Abhängigkeit von g und h (also als Vielfaches oder Teil davon).
- a) Gib den Flächeninhalt der Figur an: $A = \dots \cdot \dots$
b) Was gilt dann für den Flächeninhalt des Parallelogramms?
 $A_{\text{Parallelogramm}} = \dots \cdot \dots$

46

Mathe verstehen durch Papierfalten

© Verlag an der Ruhr | Etzold, Petzschler | ISBN 978-3-8346-2626-4 | www.verlagruhr.de

(Etzold & Petzschler, 2014)



Literatur

- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012a). *Mathewerkstatt. 5, Handreichungen* [DVD]. Cornelsen.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012b). *Mathewerkstatt. 5, Materialblock* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl). Cornelsen.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2012c). *Mathewerkstatt. 5, Schulbuch* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl). Cornelsen.
- Etzold, H., & Petzschler, I. (2014). *Mathe verstehen durch Papierfalten*. Verlag an der Ruhr.
- Kuntze, S. (2018). Flächeninhalt und Volumen. In *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I* (S. 149–177). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8_7
- Vohns, A. (2000). *Das Messen als fundamentale Idee* [1. Staatsexamensarbeit, Universität-Gesamthochschule Siegen]. <https://wwwu.aau.at/avohns/pdf/messen.pdf>
- Wörner, D. (2014). Grundvorstellungen zum Flächeninhaltsbegriff ausbilden – eine exemplarische Studie. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz* (S. 1327–1330). <https://doi.org/10.17877/DE290R-1049>