

Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 12 – Ausblick: Didaktik der Geometrie

Stoffdidaktik Mathematik

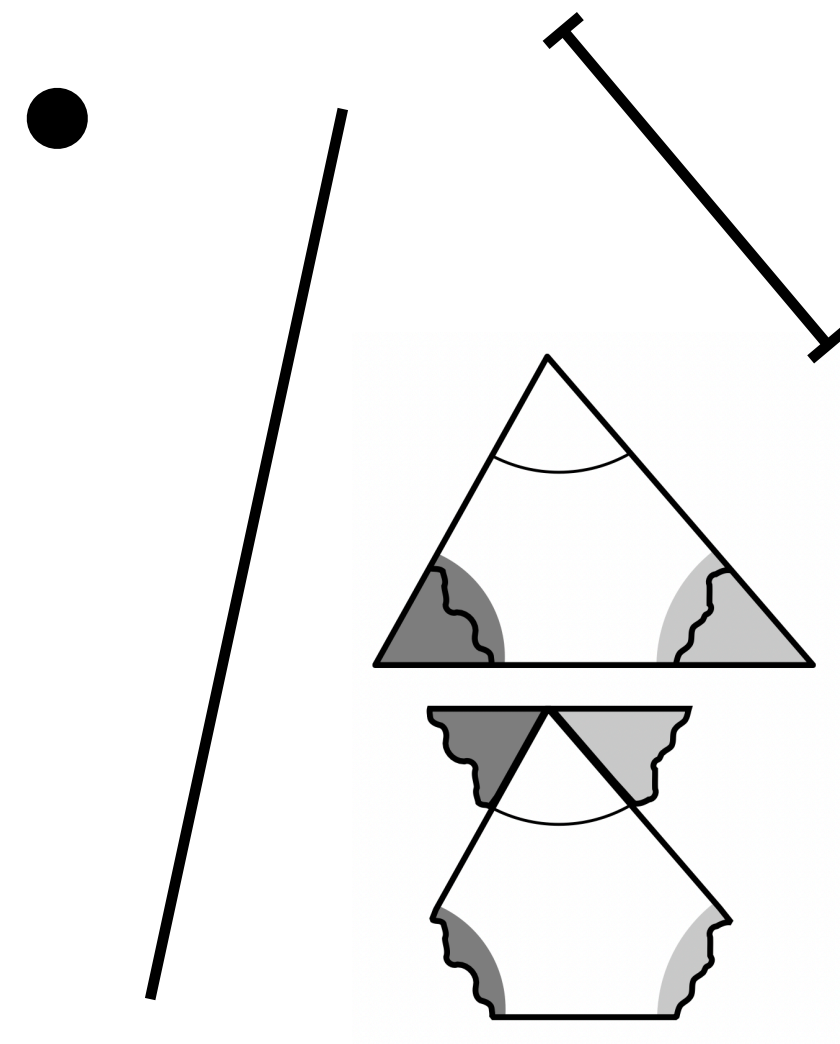
Kapitel 12 – Ausblick: Didaktik der Geometrie

- Sie sind sich der Verbindungen von Geometrie, Linearer Algebra und Analytischer Geometrie bewusst.
- Sie kennen enaktive, ikonische und symbolische Herangehensweisen zur Behandlung von Lagebeziehungen.
- Sie kennen Besonderheiten im Einsatz von DGS bei der Behandlung geometrischer Fragestellungen (wie Zugstabilität, Spuren und Ortslinien).

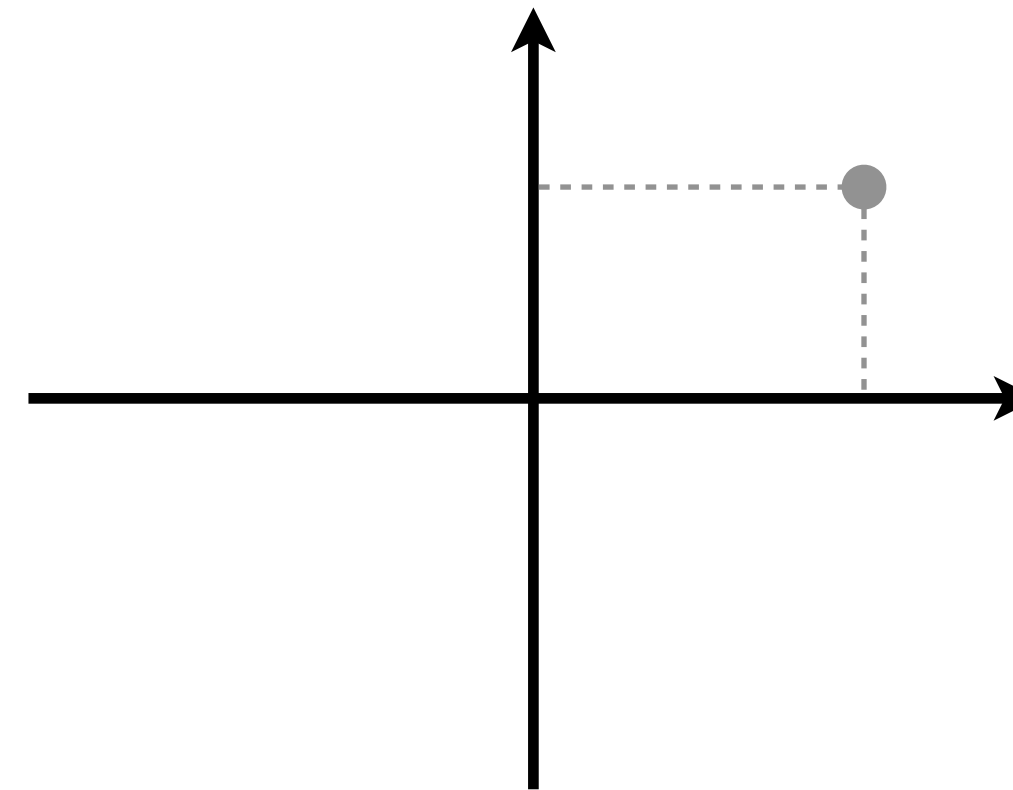
Geometrie

**Elementar-
geometrie**

Vektor als
Verschiebung



Koordinatisierung



**Analytische
Geometrie**

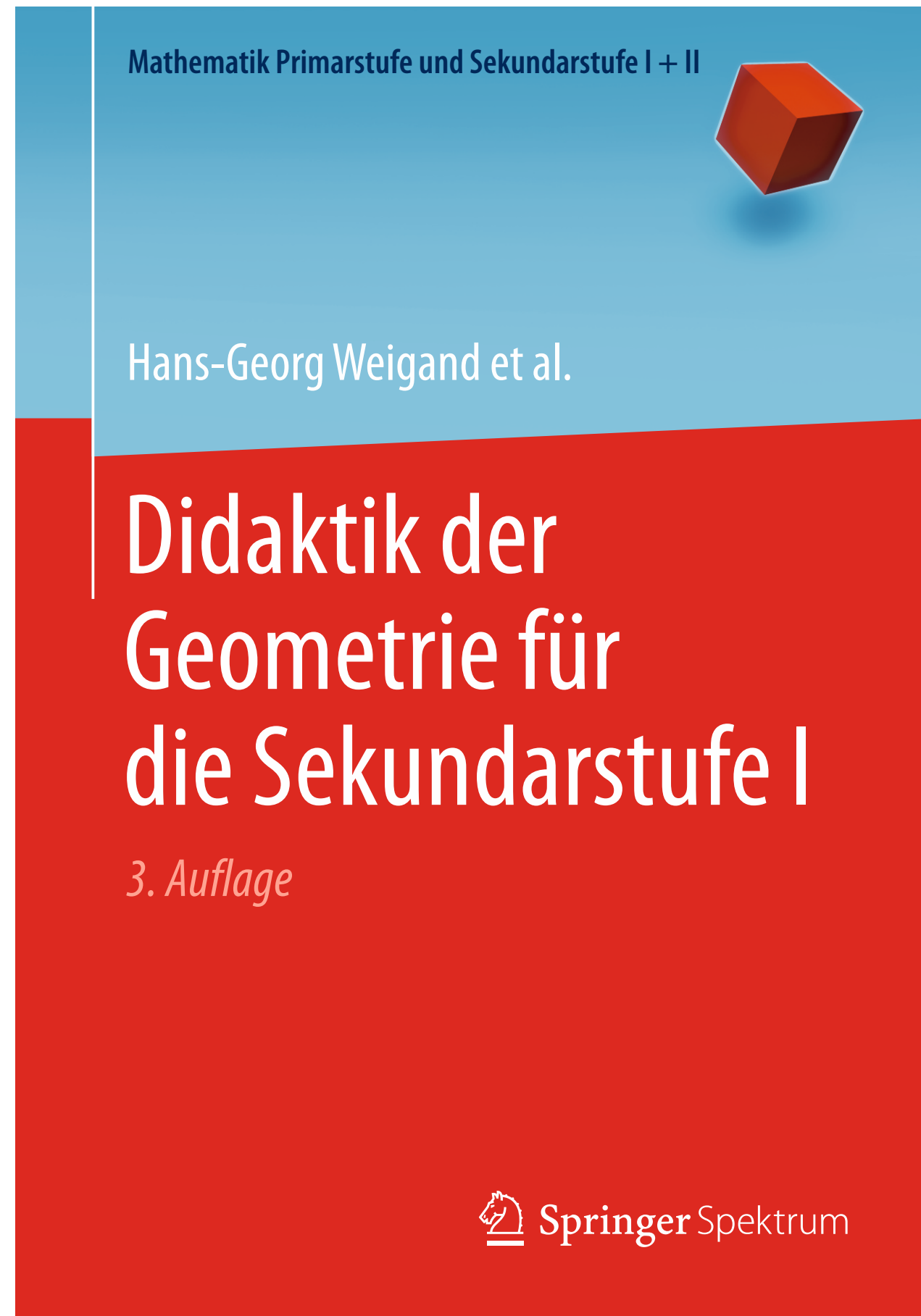
Vektor als
n-Tupel



Lineare Algebra

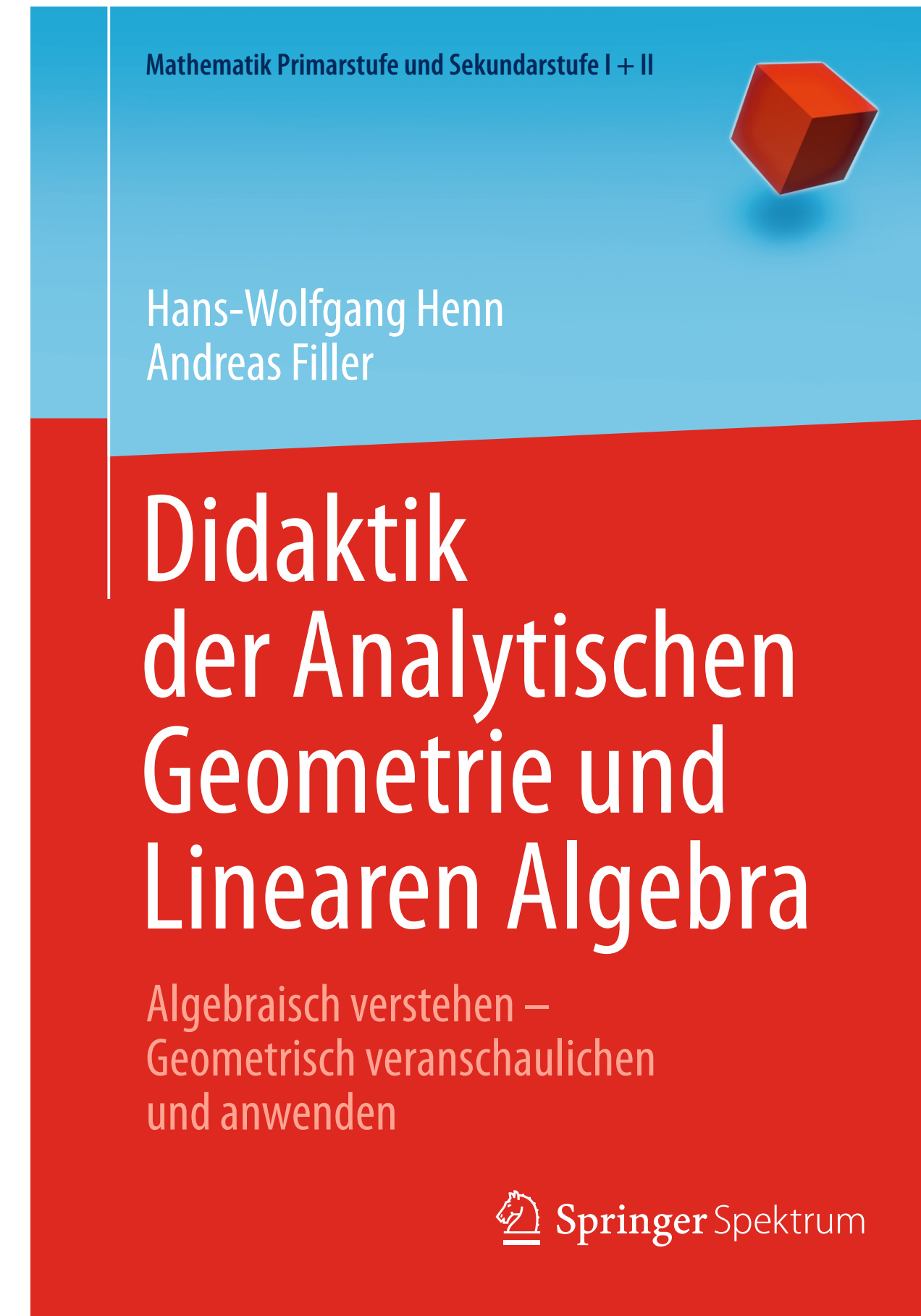
Vektor als
Element eines
Vektorraumes

Geometrie



(Weigand et al., 2018)

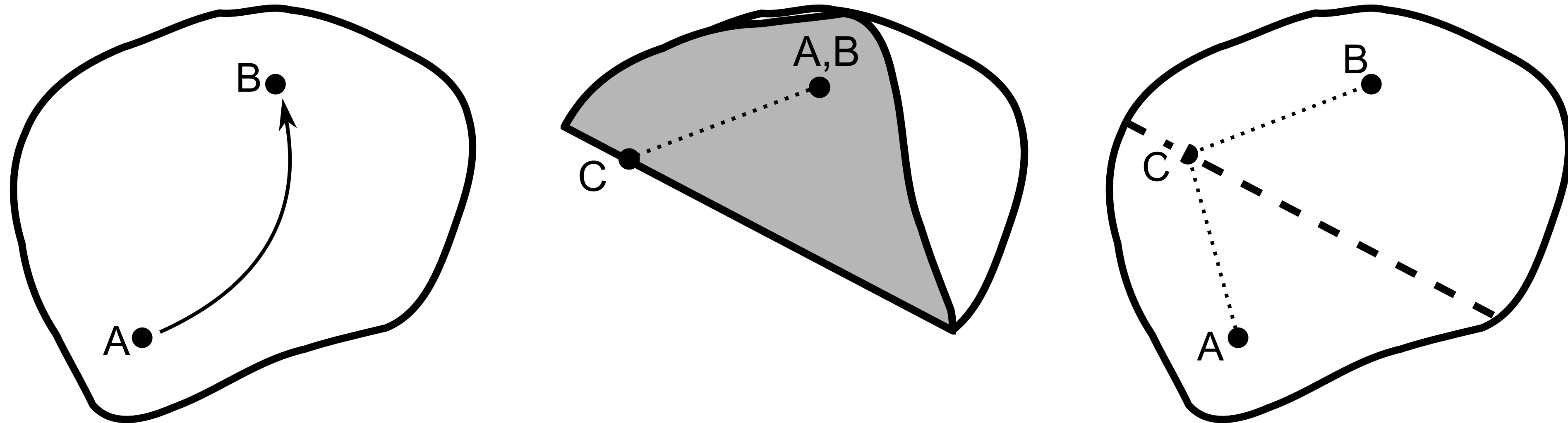
1. Ziele des Geometrieunterrichts
2. **Beweisen und Argumentieren**
3. **Konstruieren**
4. **Problemlösen**
5. **Begriffslernen und Begriffslehren**
6. Ebene Figuren und Körper
7. Flächeninhalt und Volumen
8. Symmetrie und Kongruenz
9. Ähnlichkeit
10. Trigonometrie
11. Geometrie und Geometrieunterricht



(Henn & Filler, 2015)

1. **Einführung: Analytische Geometrie/Lineare Algebra und Allgemeinbildung**
2. Lineare Gleichungssysteme
3. Der Vektorbegriff
4. Analytische Geometrie
5. Vertiefungen und Anwendungen der Analytischen Geometrie
6. Matrizen und affine Abbildungen
7. Ausblick

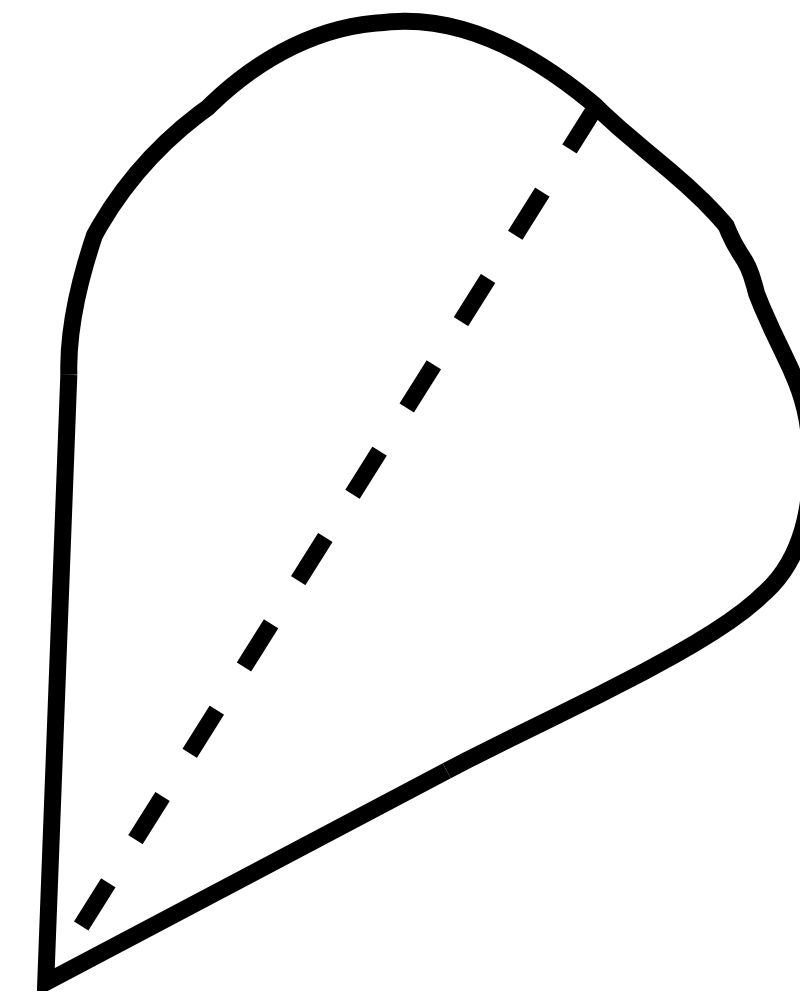
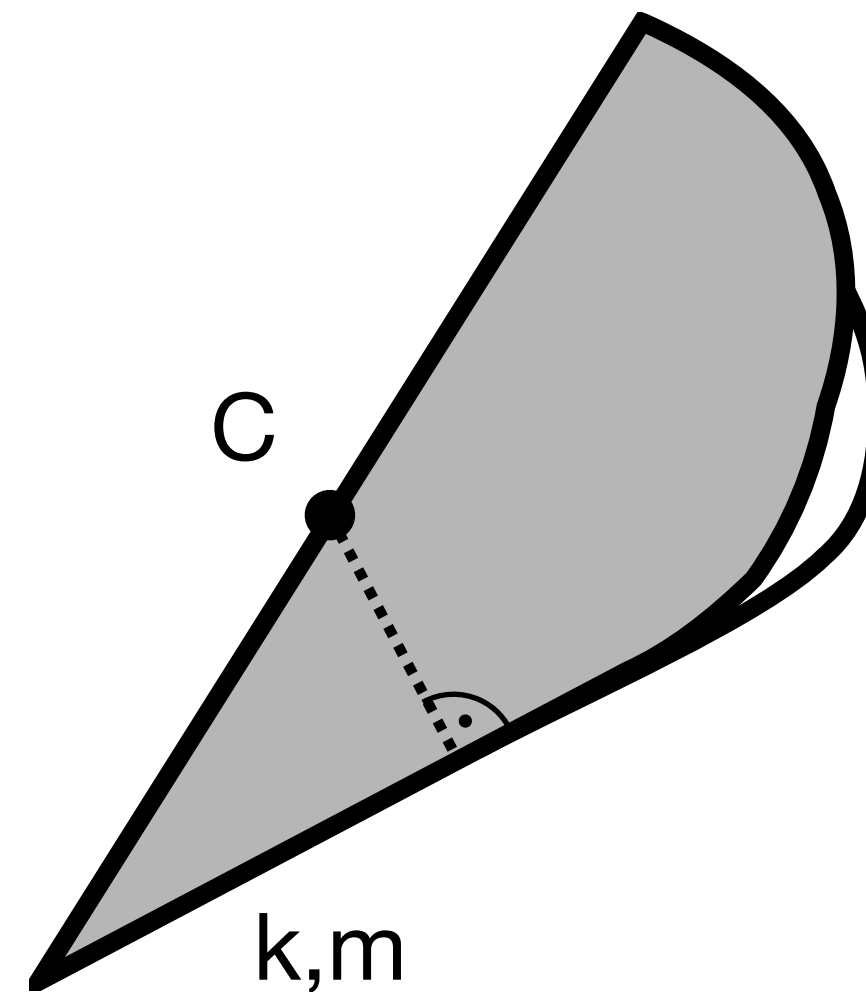
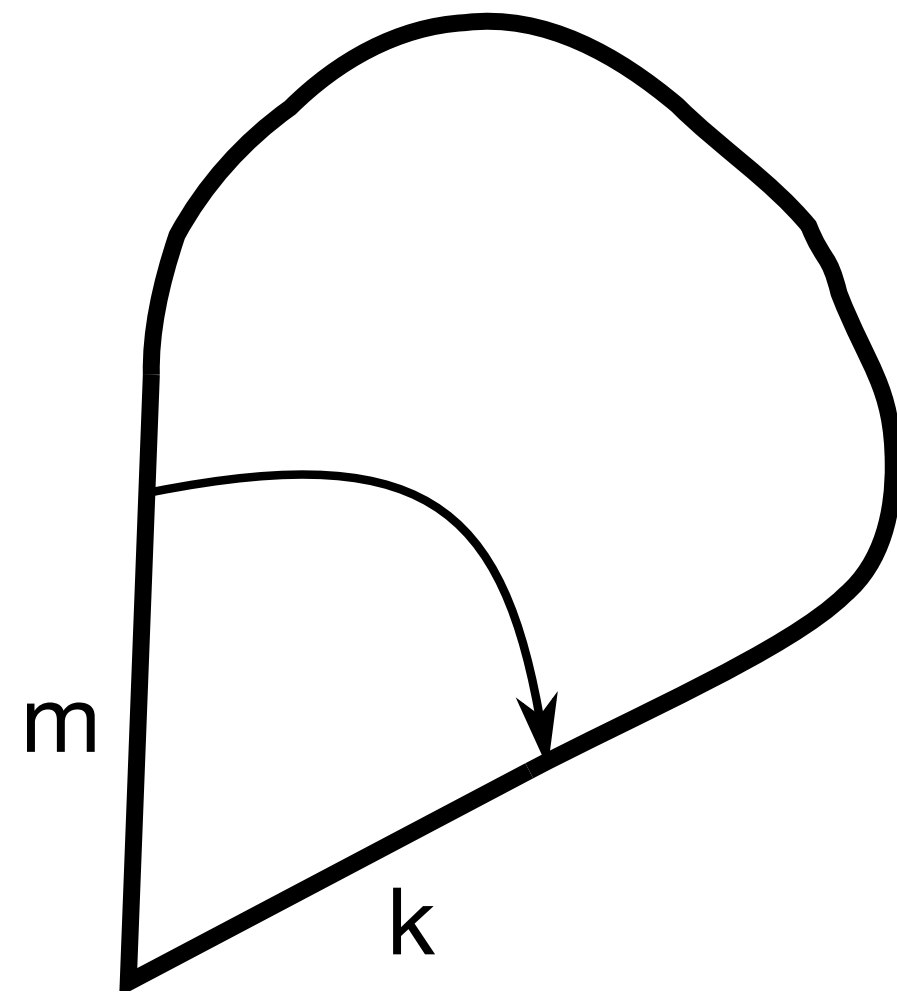
Lagebeziehungen



Mittelsenkrechte als Menge aller Punkte, die von zwei Punkten denselben Abstand haben

(Etzold & Petzschler, 2014, S. 5)

Lagebeziehungen

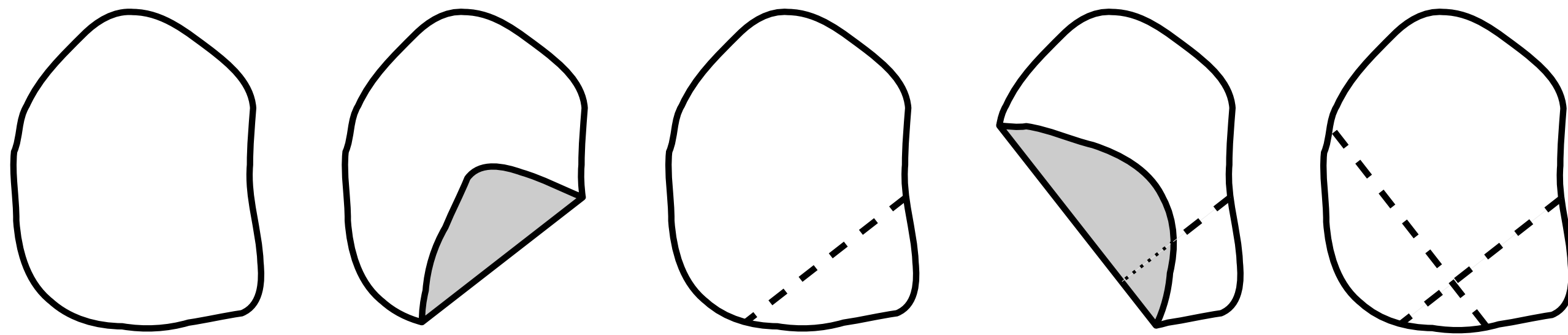


Winkelhalbierende als Menge aller Punkte, die von zwei Geraden denselben Abstand haben.

(Etzold & Petzschler, 2014, S. 5)

Lagebeziehungen

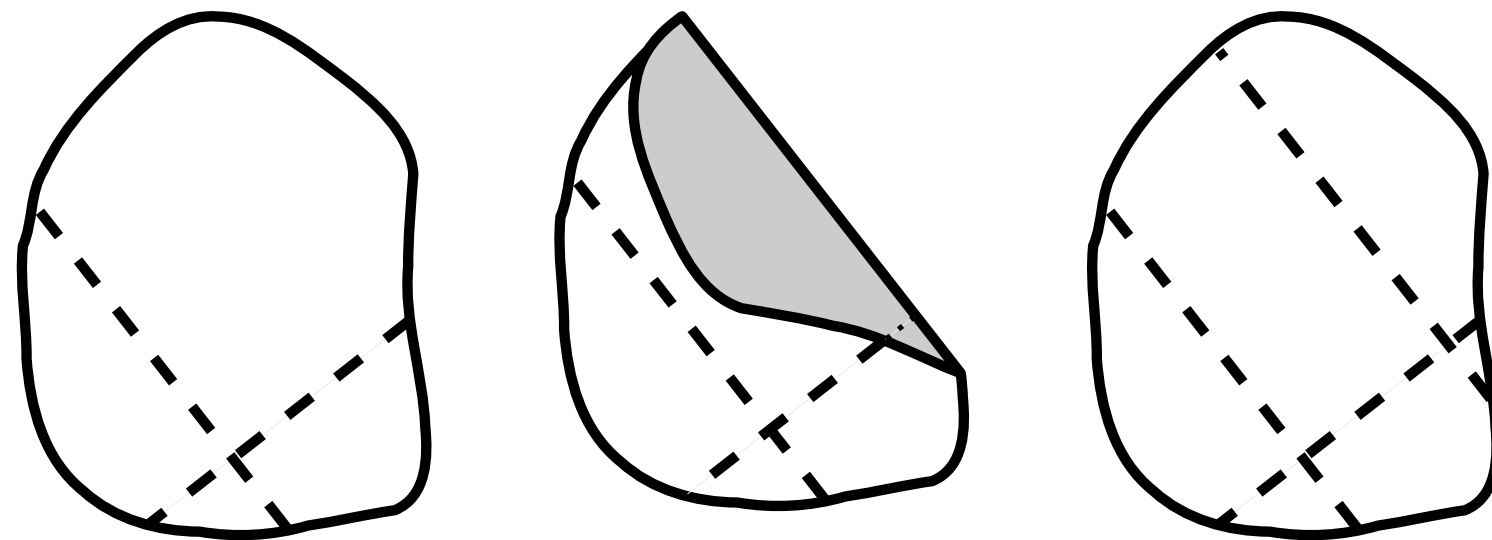
So werden zueinander senkrechte Linien gefaltet



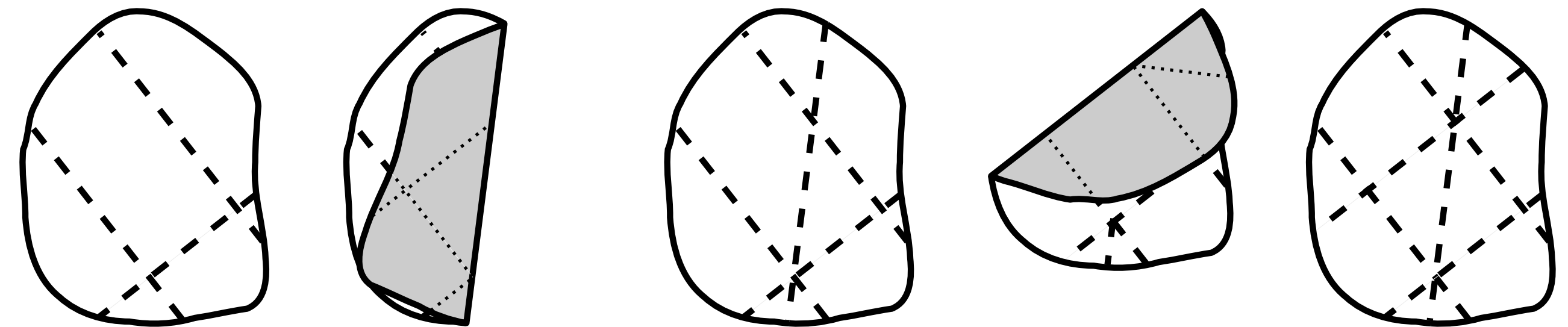
Erinnerung an die Theorie

- **Lernhandlung:** *Erkennen* (als mehrfaches *Identifizieren* und *Realisieren*) der geometrischen Konfiguration der Faltung
- **Analyse der Lernhandlung** unterstützt Aneignung geometrischen Wissens

So werden zueinander parallele Linien gefaltet
Sie entstehen als Senkrechte der Senkrechten (s. o.):



Und so wird ein Quadrat gefaltet

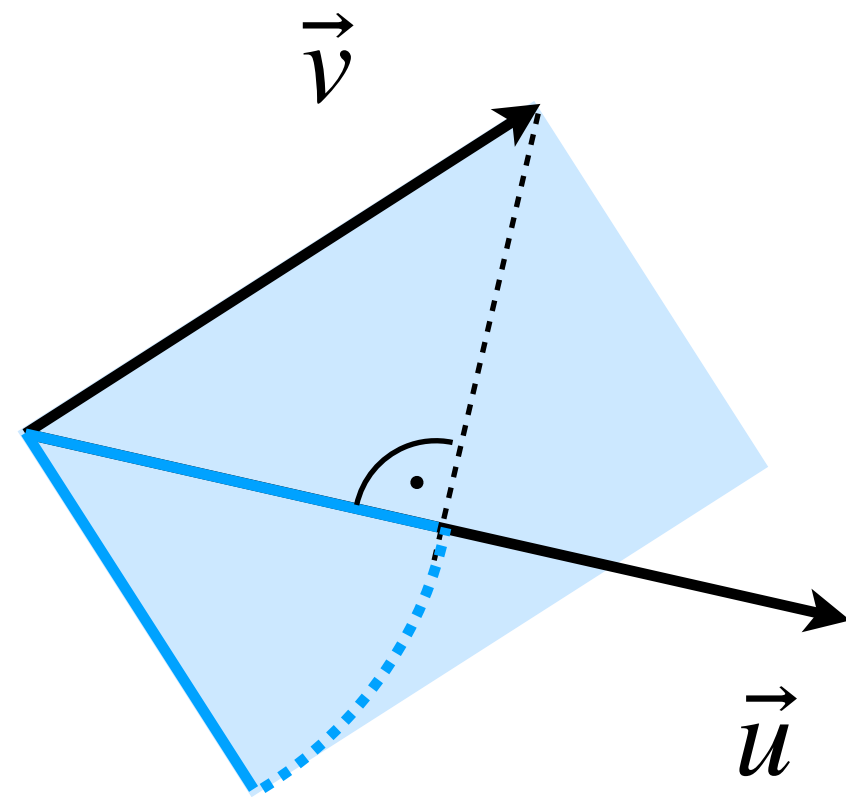


(Etzold & Petzschler, 2014, S. 10)

Lagebeziehungen

Skalarprodukt

geometrischer Zugang



$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$$

arithmetischer Zugang

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

axiomatischer Zugang

positiv definite
symmetrische
Bilinearform

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \geq 0 \quad \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \mathbf{0}$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$

$$\langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

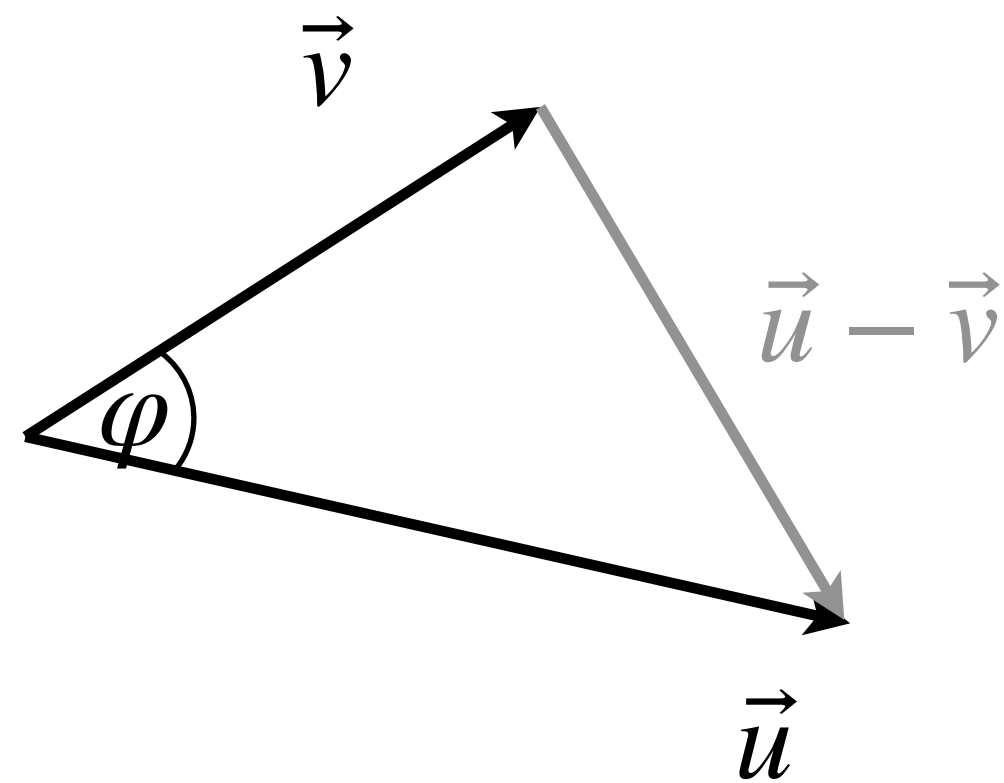
$$\langle \lambda \vec{u}, \vec{v} \rangle = \lambda \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$

(Henn & Filler, 2015, 195 ff.)

Lagebeziehungen

Skalarprodukt

geometrischer Zugang



$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sum (u_i^2 - 2u_i v_i + v_i^2) = \sum u_i^2 + \sum v_i^2 - 2 \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\sum u_i v_i = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\sum u_i v_i}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

(Henn & Filler, 2015, 195 ff.)

Lagebeziehungen

Skalarprodukt

Schreibweisen

$$\langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$$

$$\vec{u} \circ \vec{w}$$

$$\vec{u} \bullet \vec{w}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w}$$

DGS-Einsatz

Dynamische Geometrie-Software

Tipp!



Euclidea

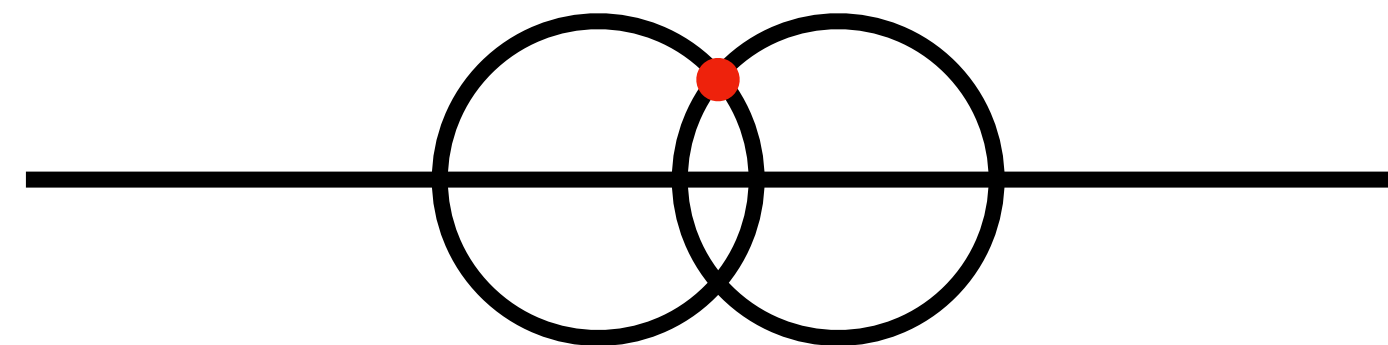
Zugstabilität

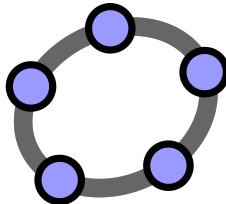



Figur (z. B. Parallelogramm)
behält ihre Eigenschaften
(Parallelität gegenüberliegender
Seiten) auch dann, wenn einzelne
Eckpunkte verschoben werden.

(vgl. Kortenkamp & Dohrmann, 2016)

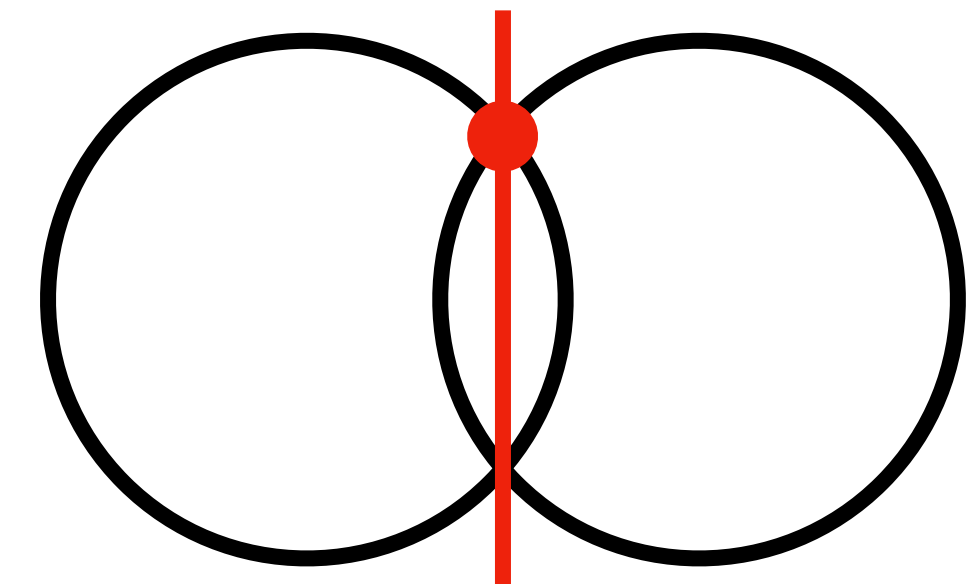
deterministisches vs.
kontinuierliches Verhalten



deterministisch:  GeoGebra
kontinuierlich:  Cinderella

(vgl. Labs, 2008, S. 57 ff.; Kortenkamp, 1999, S. 84 ff.)

Spuren und
Ortslinien



Ortslinien als Menge aller
Punkte, die eine bestimmte
Eigenschaft erfüllen

CAS-Einsatz

(nicht zwingend in der Geometrie)

Computer-**A**lgebra-**S**ystem – ermöglicht symbolische Berechnung

`solve(x^2=5, x)`

Jetzt nicht mehr nur

numerische Berechnung

$x=2.23607$

symbolische Berechnung

$x=\sqrt{5}, -\sqrt{5}$

CAS-Einsatz

(nicht zwingend in der Geometrie)

speziell für schulische Zwecke entwickelte Systeme

photomath

GeoGebra CAS

CAS-Taschenrechner (z. B. TI, Casio, ...)

professionelle kommerzielle Systeme

Maple

Mathematica

professionelle freie Systeme

Yacas

Sage

<http://sagecell.sagemath.org/>

CAS-Einsatz

(nicht zwingend in der Geometrie)

TR Taschenrechner

WTR Wissenschaftlicher Taschenrechner

MMS

modulares Mathematiksystem

GTR Graphikfähiger Taschenrechner

CAS Computer-Algebra-System

} i. d. R. programmierbare
Taschenrechner

DGS Dynamische Geometrie-Software

TK Tabellenkalkulation

LLM Large Language Models (aka KI, z. B. ChatGPT)

CAS-Einsatz

(nicht zwingend in der Geometrie)

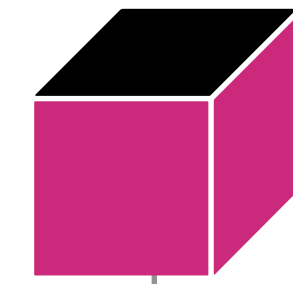
Bedienung
schulen

`solve(Gleichung, Variable)`
`solve(x^2=5, x)`

Der Befehl **löst** die Gleichung $x^2 = 5$, d. h. es werden diejenigen Werte **für** x gesucht, für die die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

identifizieren / realisieren
festigen

Blackbox-
Interpretation



$x = \sqrt{5}, -\sqrt{5}$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Befehle mit
Lösungsverfahren in
Bezug bringen;
ggf. (Pseudo-)
Algorithmen besprechen

Fehler provozieren

Aufgabenkultur
verändern

ursprüngliche Aufgabe

Löse die Gleichung $x^2 = 5$.

CAS als Prüfwerkzeug

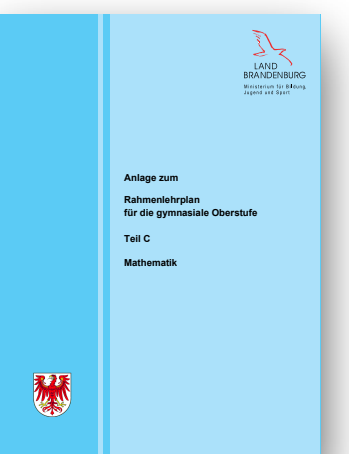
Gib eine quadratische Gleichung an, die $\sqrt{5}$ als eine Lösung hat.

CAS-Lösung als Anlass

Erkläre, warum das CAS zwei Lösungen ausgibt.

oHiMi-Aufgabe

Bestimme die Lösungsmenge von $x^2 = 5$.



Literatur

Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 7, Berlin/Brandenburg* (1. Auflage). C.C. Buchner.

Etzold, H., & Petzschler, I. (2014). *Mathe verstehen durch Papierfalten*. Verlag an der Ruhr.

Euclidea [Software]. <https://www.euclidea.xyz>

Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2>

Kortenkamp, U. (1999). *Foundations of Dynamic Geometry* [Dissertation, ETH Zurich]. <https://doi.org/10.3929/ETHZ-A-003876663>

Kortenkamp, U., & Dohrmann, C. (2016). Vorwärts-Rückwärts zum Begriff. Konstruktion und Re-Konstruktion von Zugfiguren. *mathematik lehren*, 196, 18–21.

Labs, O. (2008). *Dynamische Geometrie: Grundlagen und Anwendungen*. https://oliverlabs.net/data/0708_DynGeo.pdf

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2022b). Anlage zum Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Teil C. Mathematik. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik_Anlage_OHiMi.pdf

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>