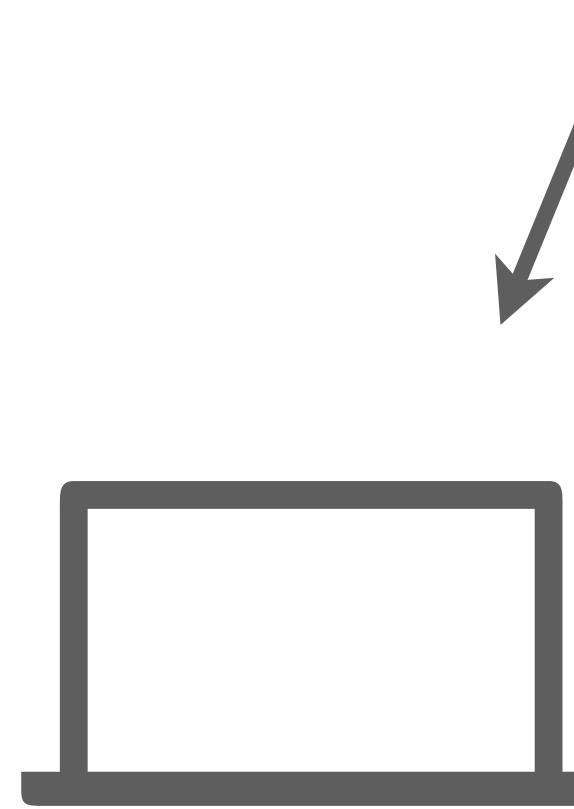


Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

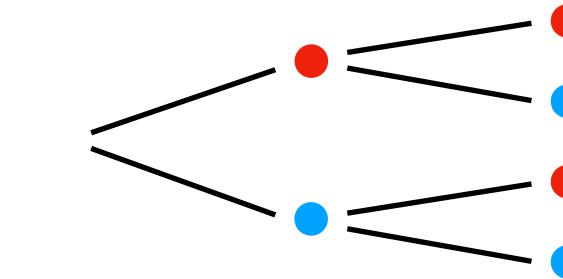
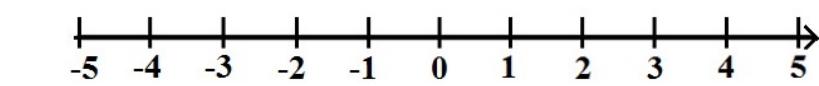
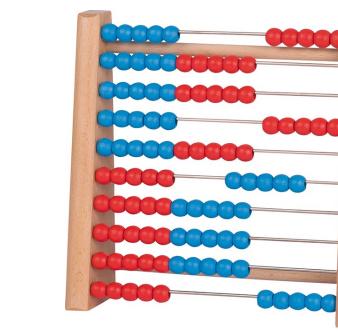
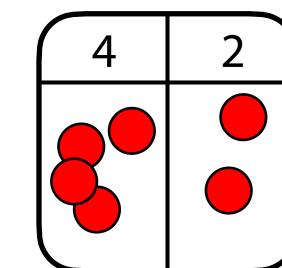
Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 10 – Exkurs: Virtuelle Arbeitsmittel

Virtuelle Arbeitsmittel



Arbeitsmittel

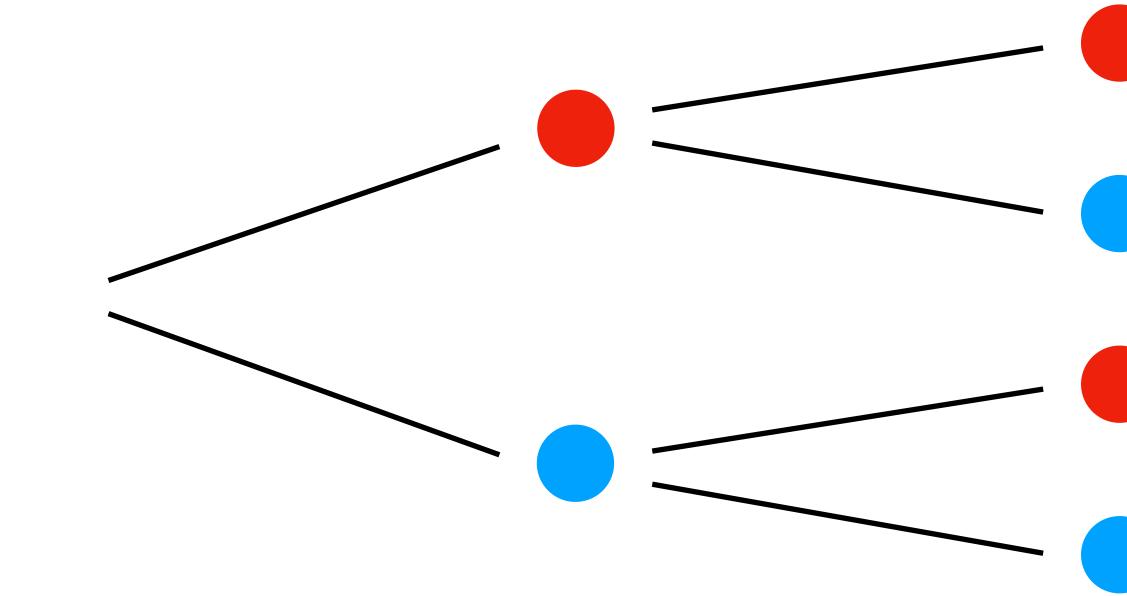
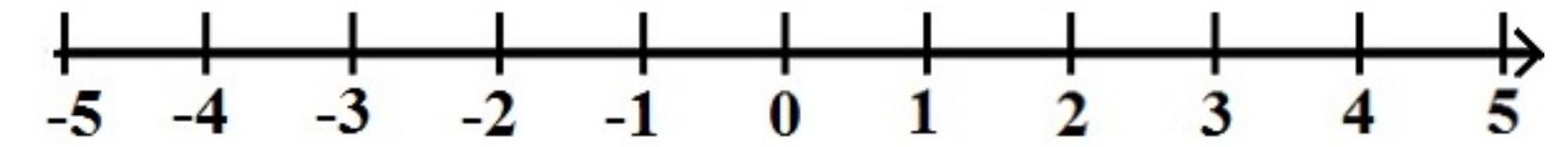
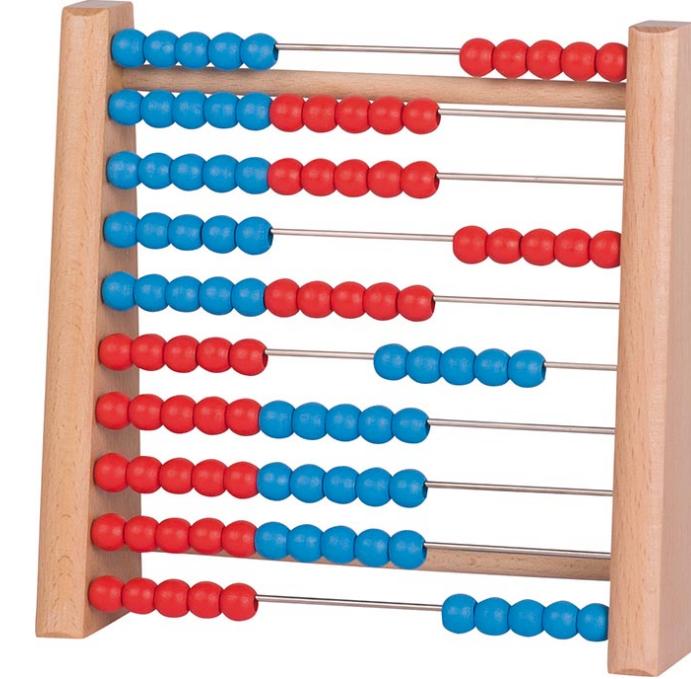
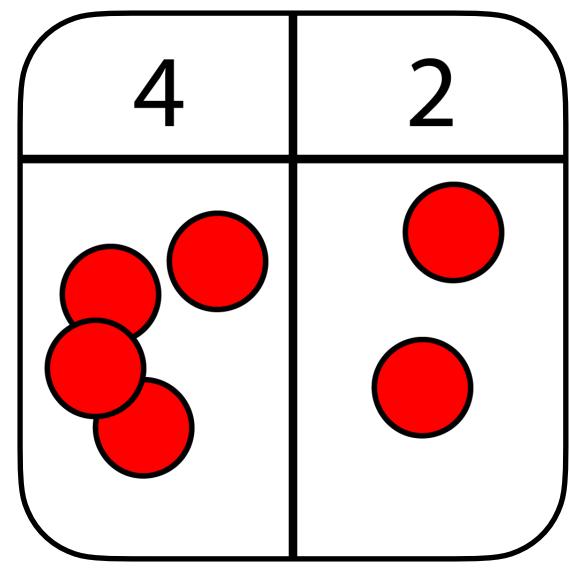


enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich

ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

Arbeitsmittel



abstrakt

enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

anschaulich

macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich

operierbar

ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

... und virtuell?

„Ein virtuelles Arbeitsmittel ist eine **interaktive**, **technologiegestützte** visuelle Darstellung eines dynamischen **mathematischen Objekts**, einschließlich aller programmierbaren Funktionen, die seine Manipulation ermöglichen und Möglichkeiten zum **Aufbau mathematischer Kenntnisse** bieten.“

(Moyer-Packenham & Bolyard, 2016)

... und virtuell?

- **interaktiv:** Verhalten, Reaktionen und Rückmeldungen sind implementiert
- **technologiegestützt:** Entwicklung in verschiedenen digitalen Umgebungen und mit jedem technischen Werkzeug entwickelt werden; nutzbar auf jedem digitalen Gerät
- **mathematisches Objekt:** Begriff / Zusammenhang / Verfahren
- **Aufbau mathematischer Kenntnisse:** Lerngelegenheiten eröffnen, nicht nur Bedienhandlungen

(Moyer-Packenham & Bolyard, 2016)

Der Epsilonschlauch

Warum ...

... sieht das so aus wie es aussieht

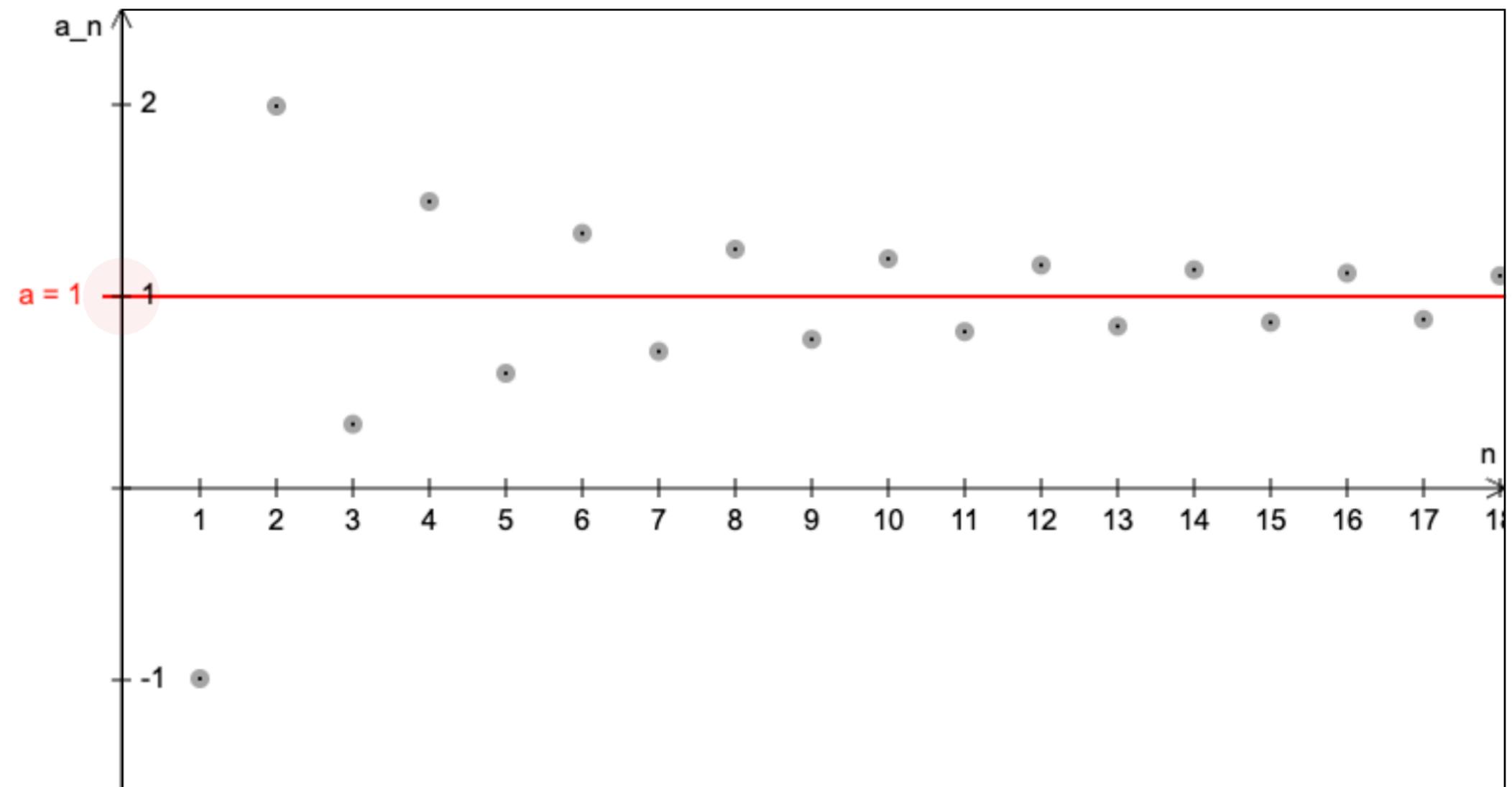
... verhält sich das so?

Eine Folge $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{Q}$,

1. Folge a_n definieren
2. Kandidat für a festlegen
3. $\varepsilon > 0$ wählen
4. $n_0 \in \mathbb{N}$ finden
5. Ungleichung prüfen

$$a_n = 1 + (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$$

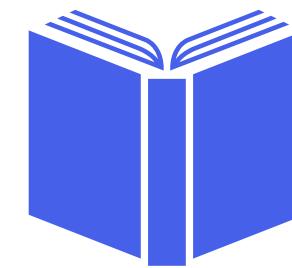


Darum!

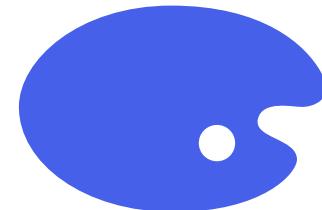
„Lernen mit (virtuellen) Arbeitsmitteln bewegt sich immer zwischen abstraktem Konzept und visueller Anschauung.“

Ziel: Verständnis entsteht, wenn *beides kooperiert*.

Inhalt



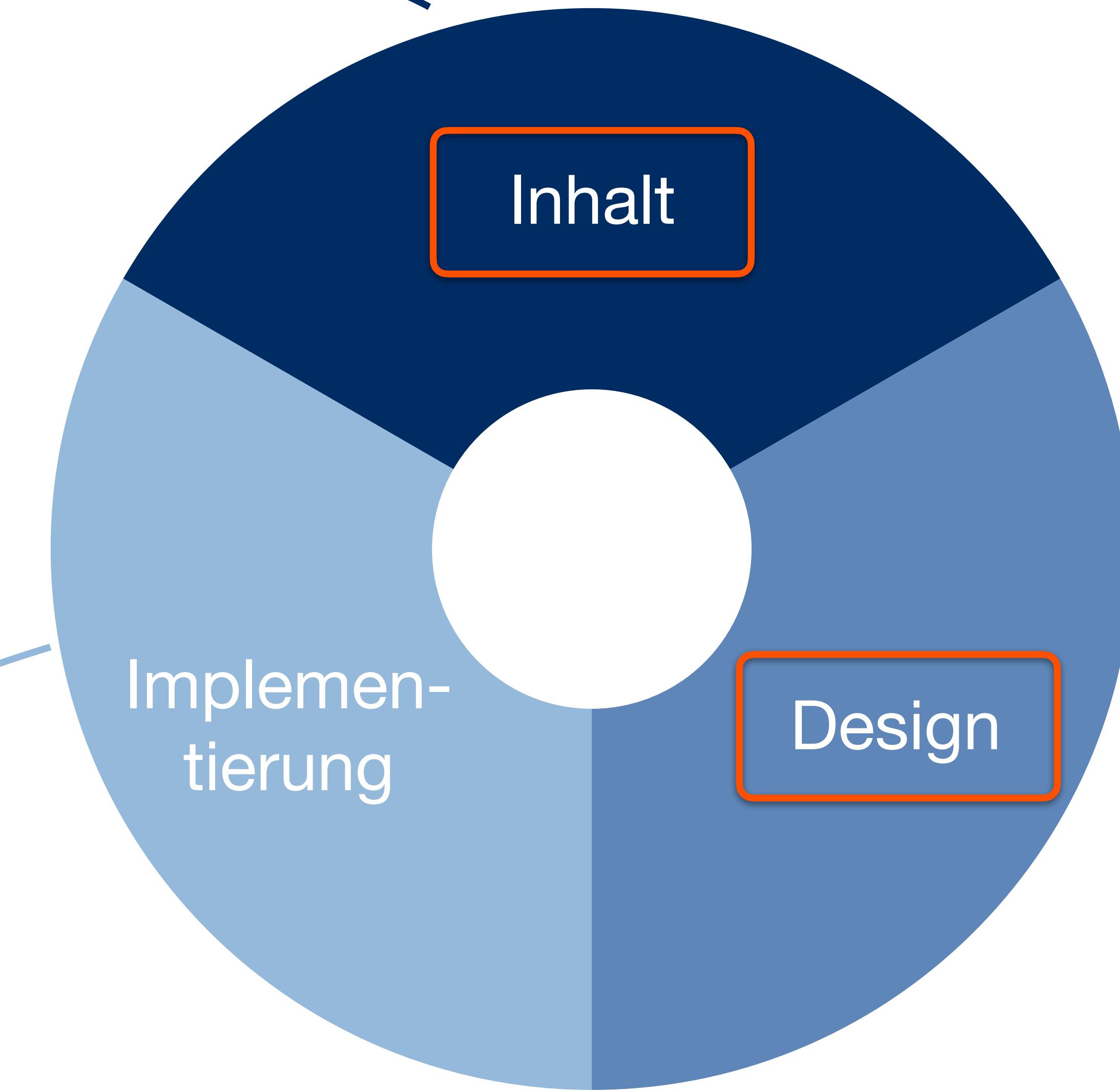
Design



(Fischbein, 1977)



Was muss alles drinstecken?



Wie wird es eingesetzt?

Wie sollte das gestaltet sein?

(in Anlehnung an Reinhold, 2019)



Was muss alles drinstecken?

Definition

Wir betrachten eine rationale Folge $a_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ mit der Zuordnung $n \mapsto a_n$.

Die Folge heißt *konvergent gegen $a \in \mathbb{Q}$* , wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Was muss alles drinstecken?

Bedeutung

„Ich finde zu jeder **noch so kleinen** ε -Umgebung ein n_0 , ab dem alle Folgenglieder in dieser Umgebung liegen.“

- statischer Aspekt des Grenzwertbegriffs
- Umgebungsvorstellung

Was muss alles drinstecken?

Kernidee

Eine Folge konvergiert gegen $a \in \mathbb{Q}$, wenn ich für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ finde, ab dem alle Folgenglieder in der ε -Umgebung um a liegen.

Anforderungen an „graphische Modelle“

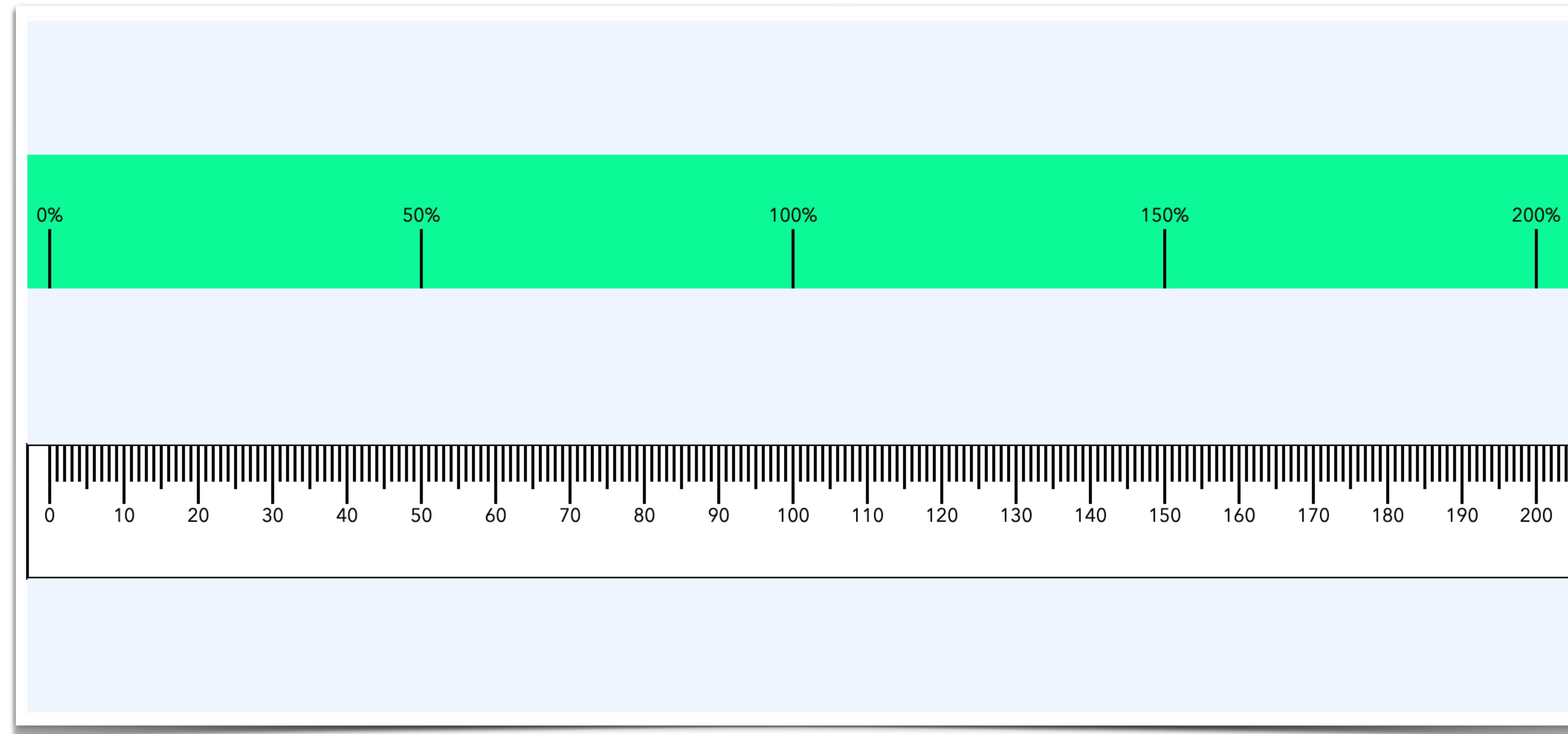
Struktureller Isomorphismus

Autonomie vom Original

**Berücksichtigung von Aspekten
menschlicher Informationsverarbeitung**

(Fischbein, 1977)

Beispiel: der Prozentstreifen



<https://www.ed.math.lmu.de/research/vipro/Prozentband.html>

Struktureller Isomorphismus

Was meint das?

das Arbeitsmittel soll „ein hohes Maß an struktureller Übereinstimmung mit dem Original aufweisen, d.h. alle relevanten Sachverhalte enthalten“

→ stoffdidaktische Analyse

abstrakt

enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

(Bea und Scholz, 1995)

Autonomie vom Original

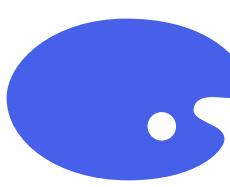
„eine gewisse Autonomie gegenüber dem Original besitzen, d.h. nicht nur in Verbindung mit ihm, sondern an Stelle des Originals eingesetzt werden können.“

→ eigenständiges „Denkwerkzeug“

operierbar

ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

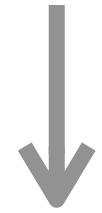
(Bea und Scholz, 1995)



Berücksichtigung von Aspekten menschlicher Informationsverarbeitung

„[...]durch ihre **erhöhte kognitive Zugänglichkeit** vor allem für didaktische Zwecke zusätzlich bessere Eigenschaften besitzen als das Original.“

anschaulich



Kognitive **Theorie** multimedialen Lernens



Design**prinzipien** multimedialen Lernens

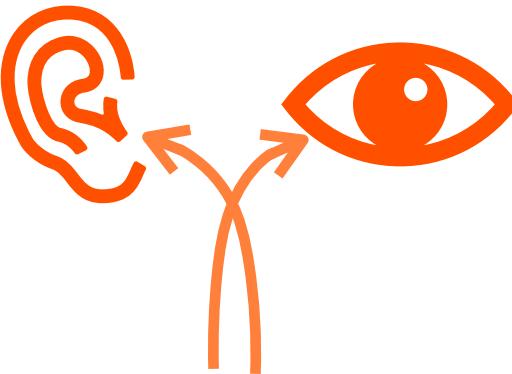
macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich

Didaktisches Potenzial!

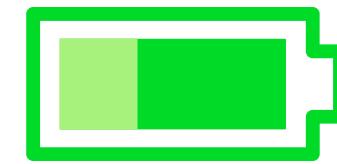
(Bea und Scholz, 1995; Mayer, 2021)

Kognitive **Theorie** multimedialen Lernens

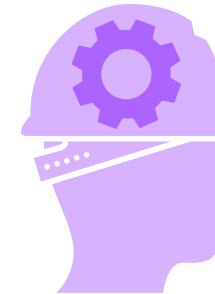
1. **Dual-Channel-Annahme**



2. **Limited-Capacity-Annahme**



3. **Active-Processing-Annahme**



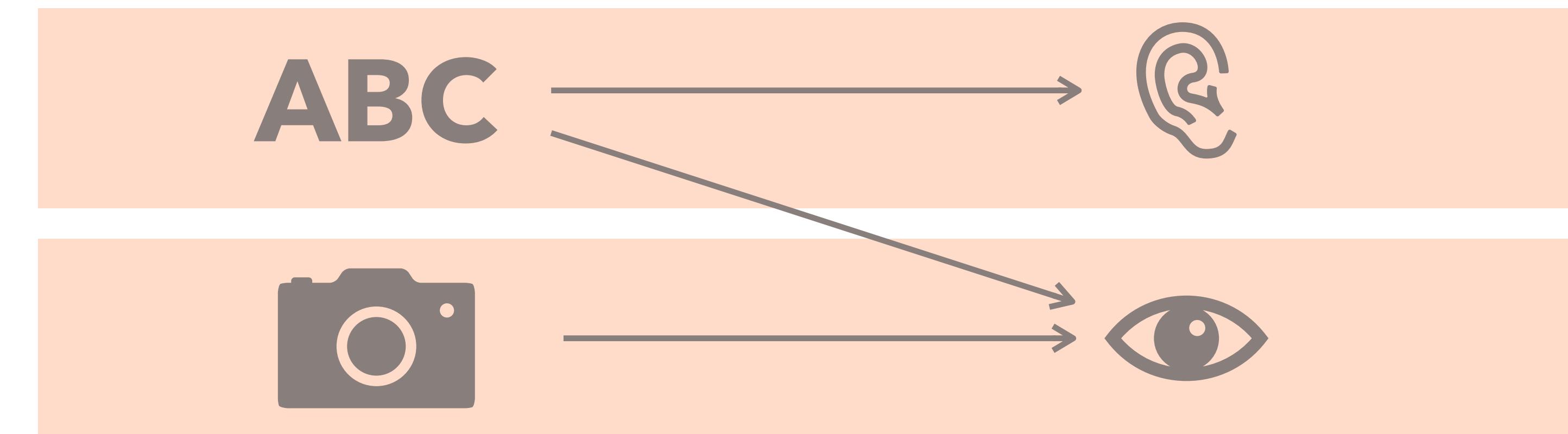
(Mayer, 2021)

Dual-Channel-Annahme

auditiv-verbal

visuell-piktorial

Repräsentationsformen Sinnesmodalitäten

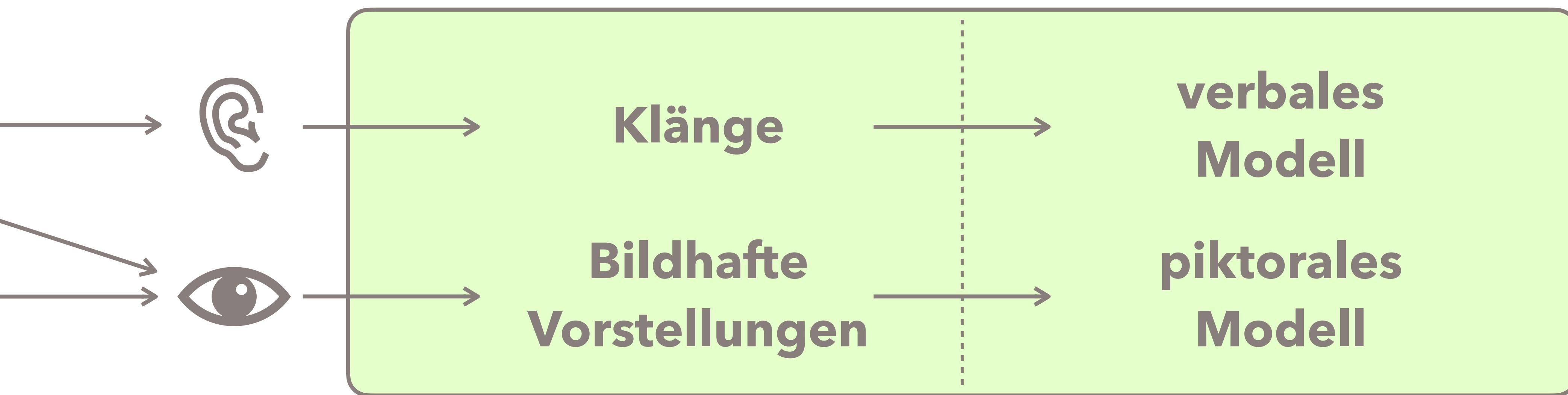


(Mayer, 2021)



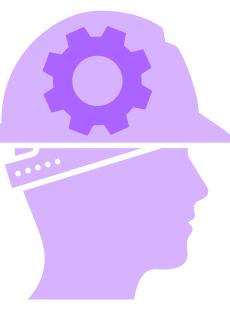
Limited-Capacity-Annahme

Arbeitsgedächtnis

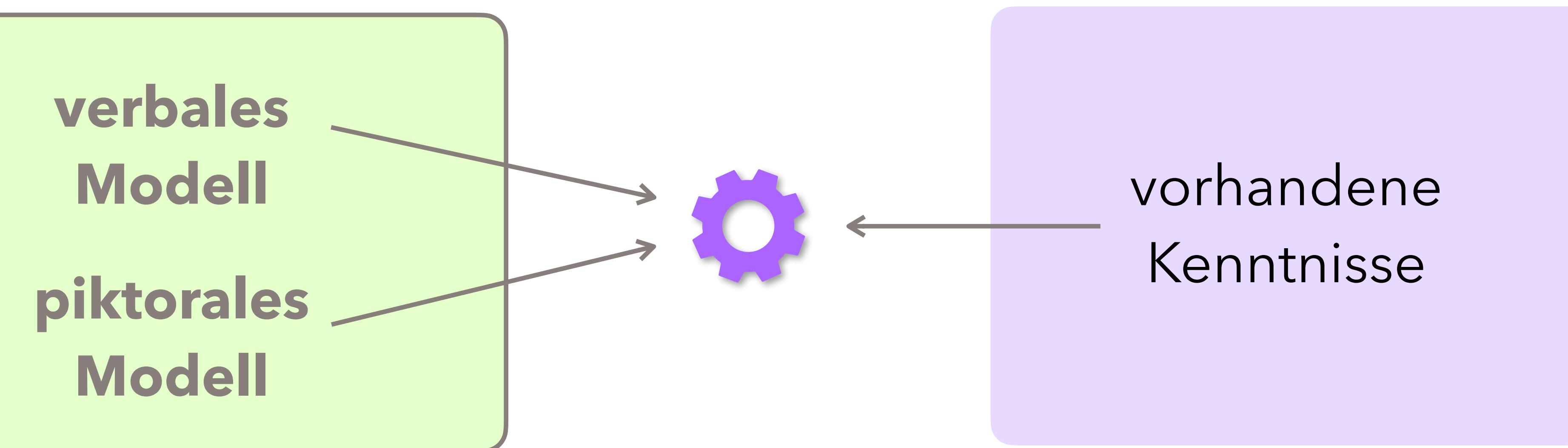


Lernprozesse sind nur effektiv, wenn die kognitive Belastung im Arbeitsgedächtnis innerhalb der Kapazitätsgrenze bleibt.

(Mayer, 2021)

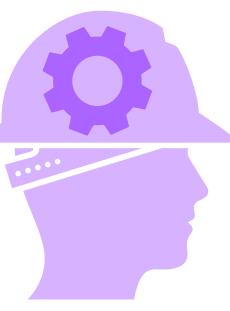


Active-Processing-Annahme

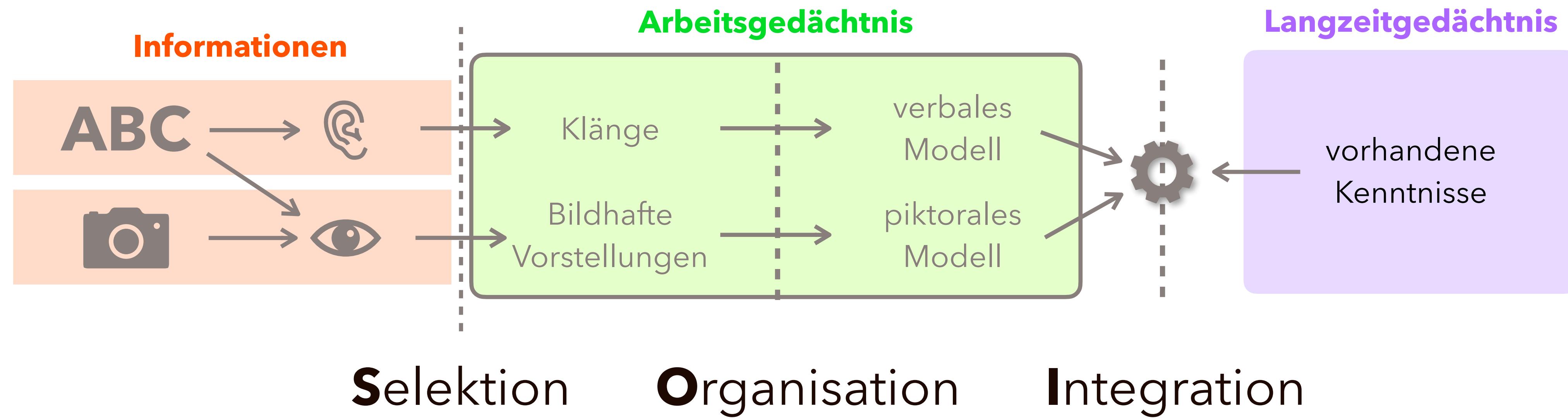


Lernen passiert nicht durch reine Aufnahme, sondern durch
aktive mentale Arbeit

(Mayer, 2021)



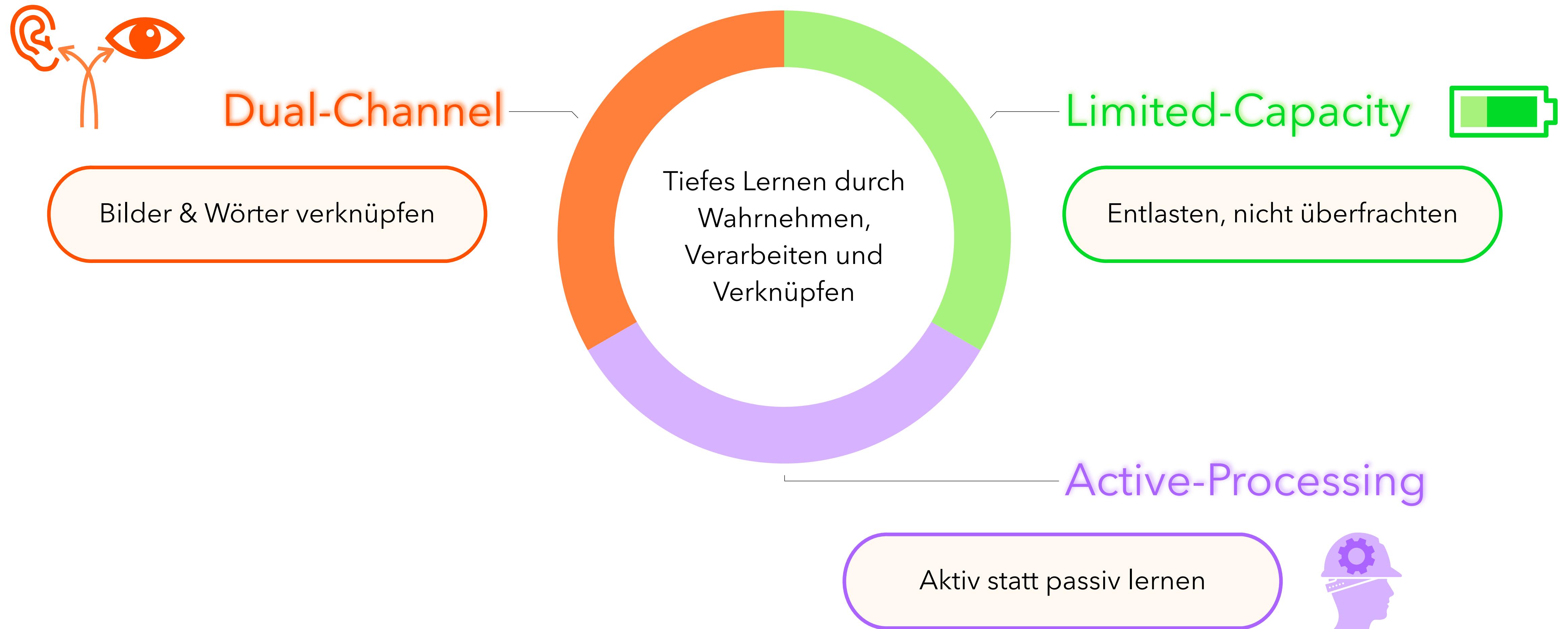
Active-Processing-Annahme



→ gute VAMs unterstützen diese drei Schritte

(Mayer, 2021)

Überblick: Kognitive Theorie des multimedialen Lernens



Human Computer Interaction

Zehn Heuristiken für User Interface Design

(Nielsen, 2024)

1. Sichtbarkeit des Systemzustands)
2. Übereinstimmung zwischen System und wirklicher Welt
3. Steuerung durch die Benutzer und Entscheidungsfreiheit
4. Konsistenz und Standards
5. Fehlervermeidung)
6. Wiederkennen statt sich erinnern
7. Flexibilität und Effizienz des Gebrauchs)
8. Ästhetisches und minimalistisches Design
9. Benutzern helfen, Fehler zu bemerken, zu durchschauen und zu beheben)
10. Hilfe und Dokumentation

Acht goldene Regeln

(Schneidermann, 2016)

1. Strebe Konsistenz an.
2. Strebe universelle Usability an.
3. Biete informative Rückmeldungen an.
4. Gestalte Dialoge so, dass sie in sich abgeschlossen sind.
5. Verhindere Fehler.
6. Erlaube einfaches Rückgängigmachen von Aktionen.
7. Belasse den Benutzern die Steuerung.
8. Entlaste das Kurzzeitgedächtnis.

fundamentalen Prinzipien der Interaktion

(Norman, 2016)

1. Angebotscharakter
2. Signifikanz/Bedeutung
3. Bedingungen
4. Abbildungen
5. Rückmeldung

Grundprinzipien des Interaktionsdesigns

(Tognazzi, 2014)

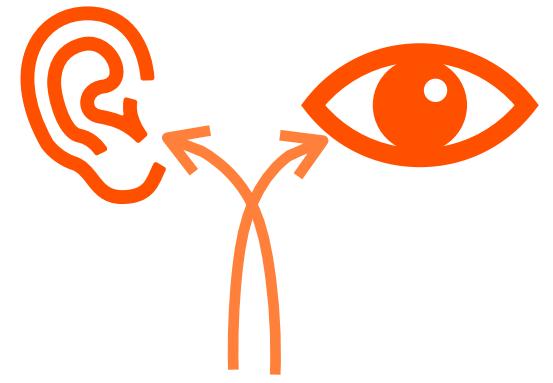
1. Ästhetik
2. Antizipation
3. Handlungsfreiheit
4. Farbe
5. Konsistenz
6. Voreinstellungen
7. Auffindbarkeit
8. Effizienz des Benutzers
9. Explorierbare Schnittstellen
10. Fitts'Gesetz
11. Schnittstellenobjekte
12. Wartezeitverringerung
13. Erlernbarkeit
14. Metaphern
15. Sicherung der Arbeit der Benutzer
16. Lesbarkeit
17. Einfachheit
18. Statusinformation
19. Sichtbare Schnittstellen



Designprinzipien

... die sich aus der kognitiven Theorie
multimedialen Lernens ableiten lassen

Designprinzipien



Prinzipien zur Förderung generativer Lernprozesse:

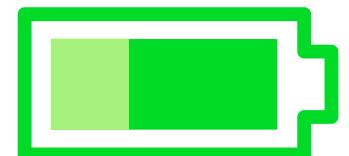
- Multimediaprinzip
- Personalisierungsprinzip
- Bildprinzip
- Sprachprinzip
- Embodiment-Prinzip
- Prinzip der generativen Aktivität
- Immersionsprinzip

weitere Prinzipien:

- Prinzip der geteilten Aufmerksamkeit
- Prinzip des ausgearbeiteten Beispiels
- Prinzip der flüchtigen Informationen
- Prinzip der Zusammenarbeit
- Prinzip der Animationskomposition
- Prinzip der Interaktivität
- Prinzip der multiplen Repräsentationen
- Expertise Reversal Effect
- ...

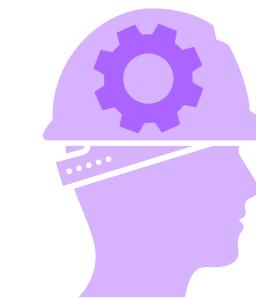
Prinzipien zur Reduktion extrinsischer Belastungen:

- Kohärenz-Prinzip
- Signal-Prinzip
- Redundanz-Prinzip
- Prinzip der räumlichen Nähe
- Prinzip der simultanen Darstellung



Prinzipien zur Verwaltung essenzieller Lernprozesse:

- Segmentierungs Prinzip
- Prinzip des Pre-Trainings
- (Multi)modalitäts-Prinzip



Multimedia-Prinzip

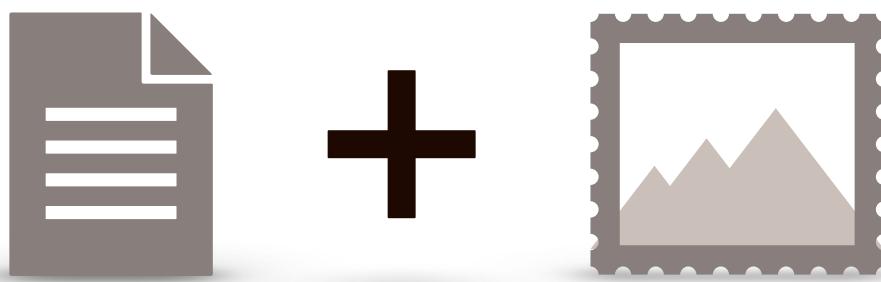
Multimedia-Prinzip

Dieses Prinzip besagt, dass eine Kombination von Text und Grafik im Allgemeinen besser den Lernprozess unterstützt als Text allein. In einer Reihe von Studien konnte das Multimediaprinzip deutlich bestätigt werden (Levie & Lentz 1982; Levie, Anglin & Carney 1987; Mayer & Anderson 1991; zusammengefasst in Mayer 2001).

Entscheidend ist, dass Grafiken und Text sinnvoll miteinander kombiniert werden, beispielsweise wenn Bildfolgen (Animationen) und erläuternder Text zeitlich aufeinander synchronisiert werden (Mayer & Anderson 1991). In Untersuchungen zeigten sich als lernwirksam:

- Grafiken zur thematischen Organisation die z.B. Beziehungen zwischen Themengebieten aufzeigen,
- Grafiken zur Veranschaulichung von Beziehungen und
- Grafiken als Schnittstelle zur Aufgabe.

Multimedia-Prinzip



Nutze eine Kombination aus **Wörtern** und **Bildern**.

Multimedia-Prinzip



Die Kombination von **Wörtern** und **Bildern** unterstützt den Lernprozess im Allgemeinen besser als Text allein.



Nutze eine Kombination aus **Wörtern** und **Bildern**.

Kohärenz-Prinzip

1

2

Kohärenz-Prinzip

X

2

Kohärenz-Prinzip



Multiple Darstellungen in Lernangeboten müssen **inhaltlich** mit dem Lerngegenstand und -ziel **zusammenhängen**.



Verzichte in multimedialen Lernumgebungen auf interessante, aber für die Erreichung des intendierten Lernziels **irrelevante** Inhalte.

Prinzip der räumlichen Nähe



Räumlich benachbarte Darstellung textueller und bildlicher Informationen fördern den Wissenserwerb mehr als eine getrennte Präsentation von Texten und Bildern.

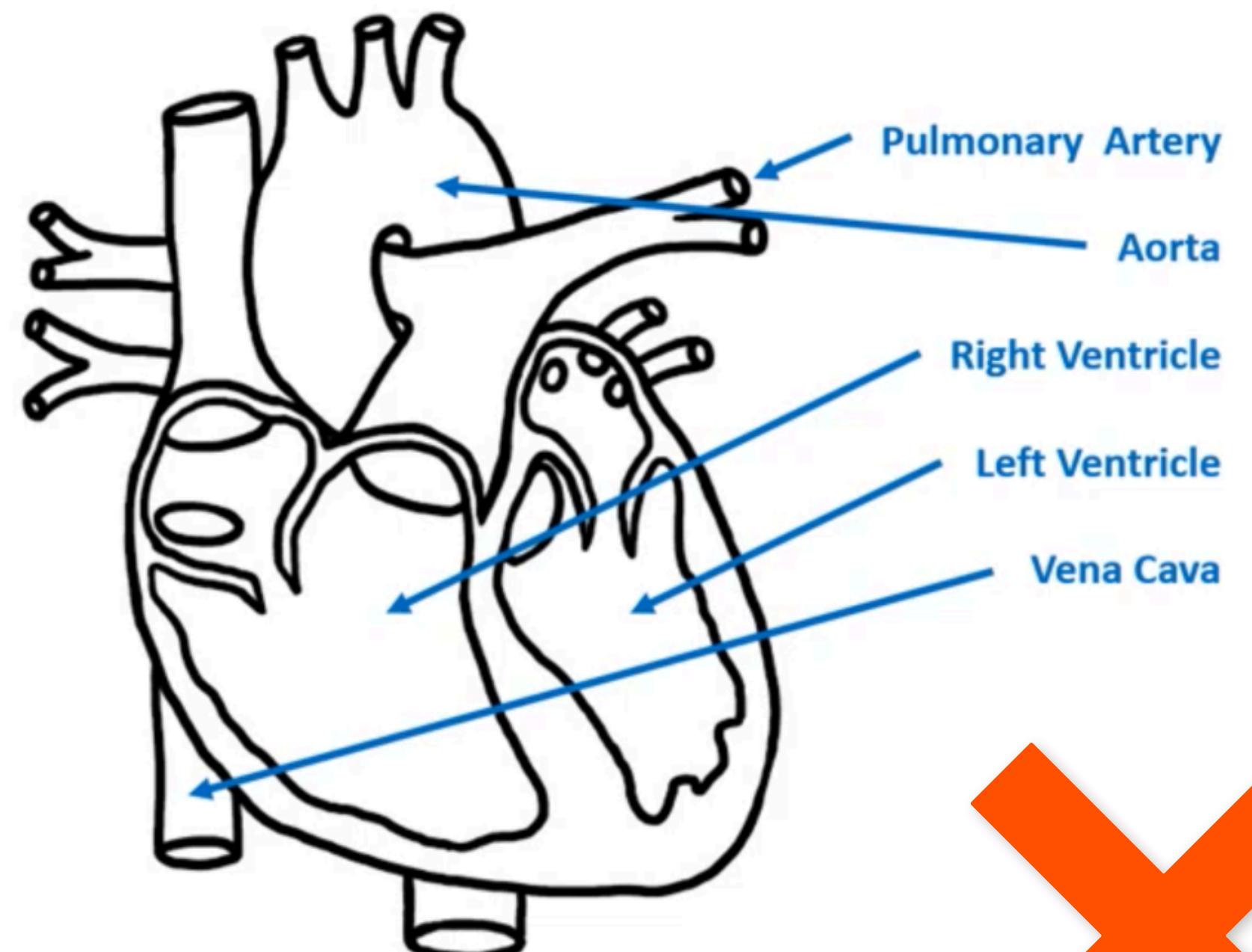


Platziere zusammengehörende Worte und Grafiken **nahe beieinander**.

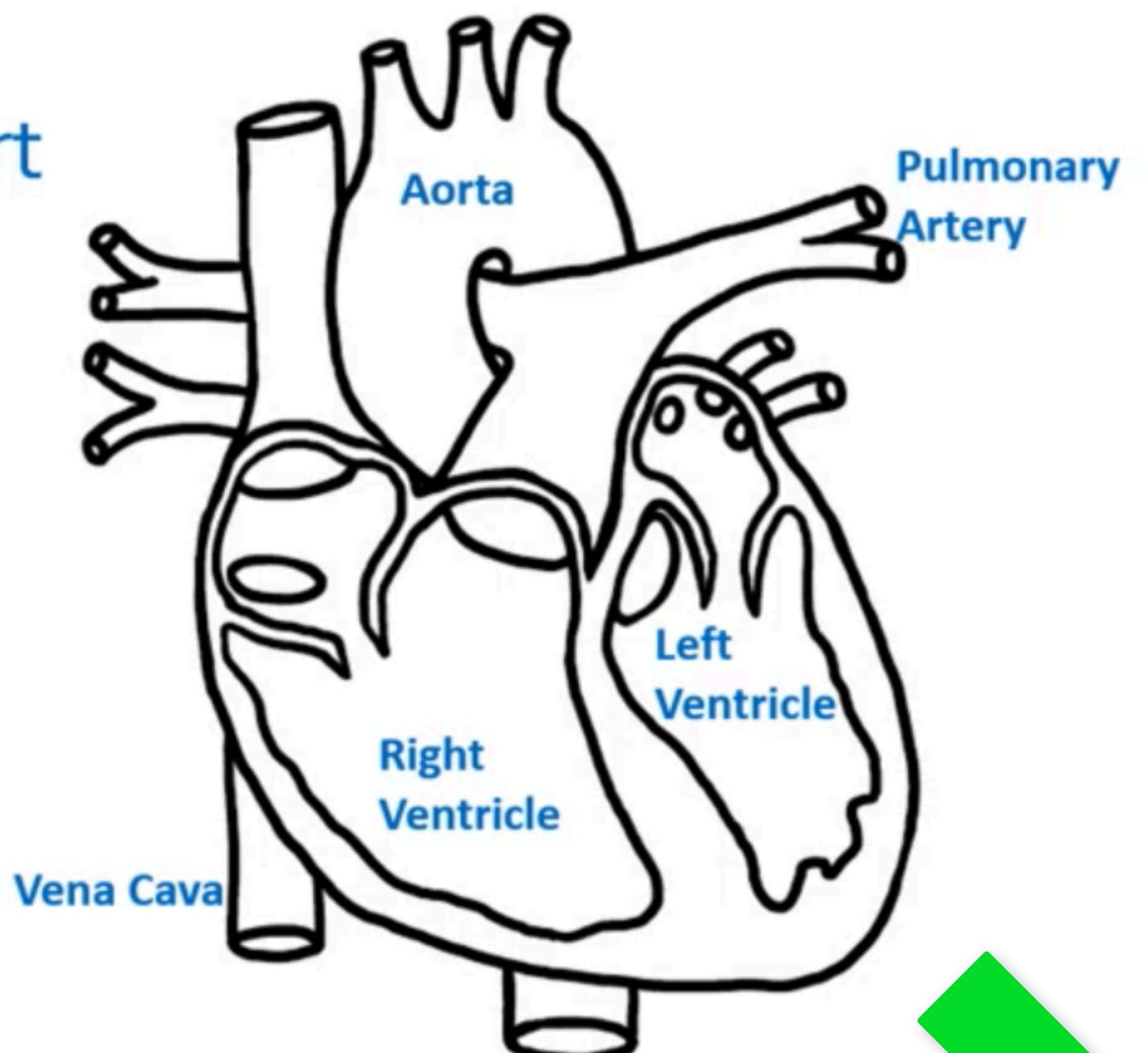
Prinzip der räumlichen Nähe



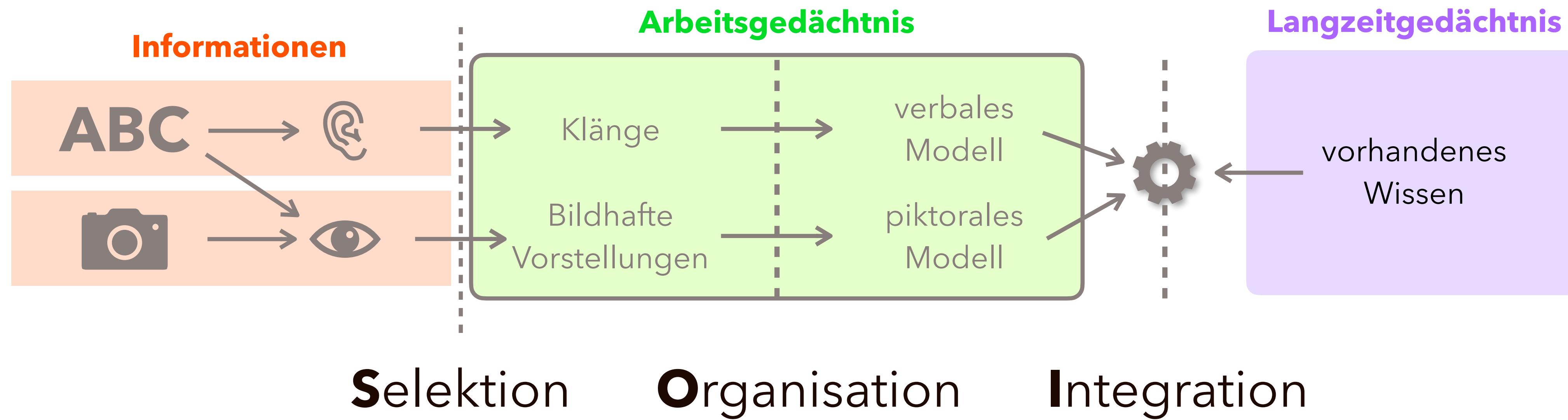
The Heart



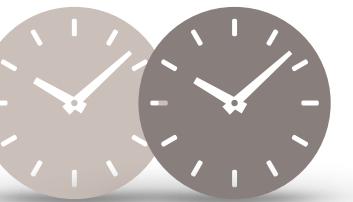
The Heart



Prinzip der simultanen Darstellung



Prinzip der simultanen Darstellung

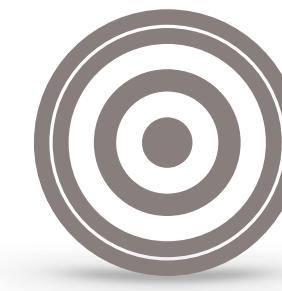


Die gleichzeitige Präsentation bildlicher und sprachlicher Informationen fördert den Wissenserwerb mehr, als die sukzessive Präsentation der gleichen Inhalte.



Stelle zusammengehörige Informationen **gleichzeitig** dar.

Signal-Prinzip

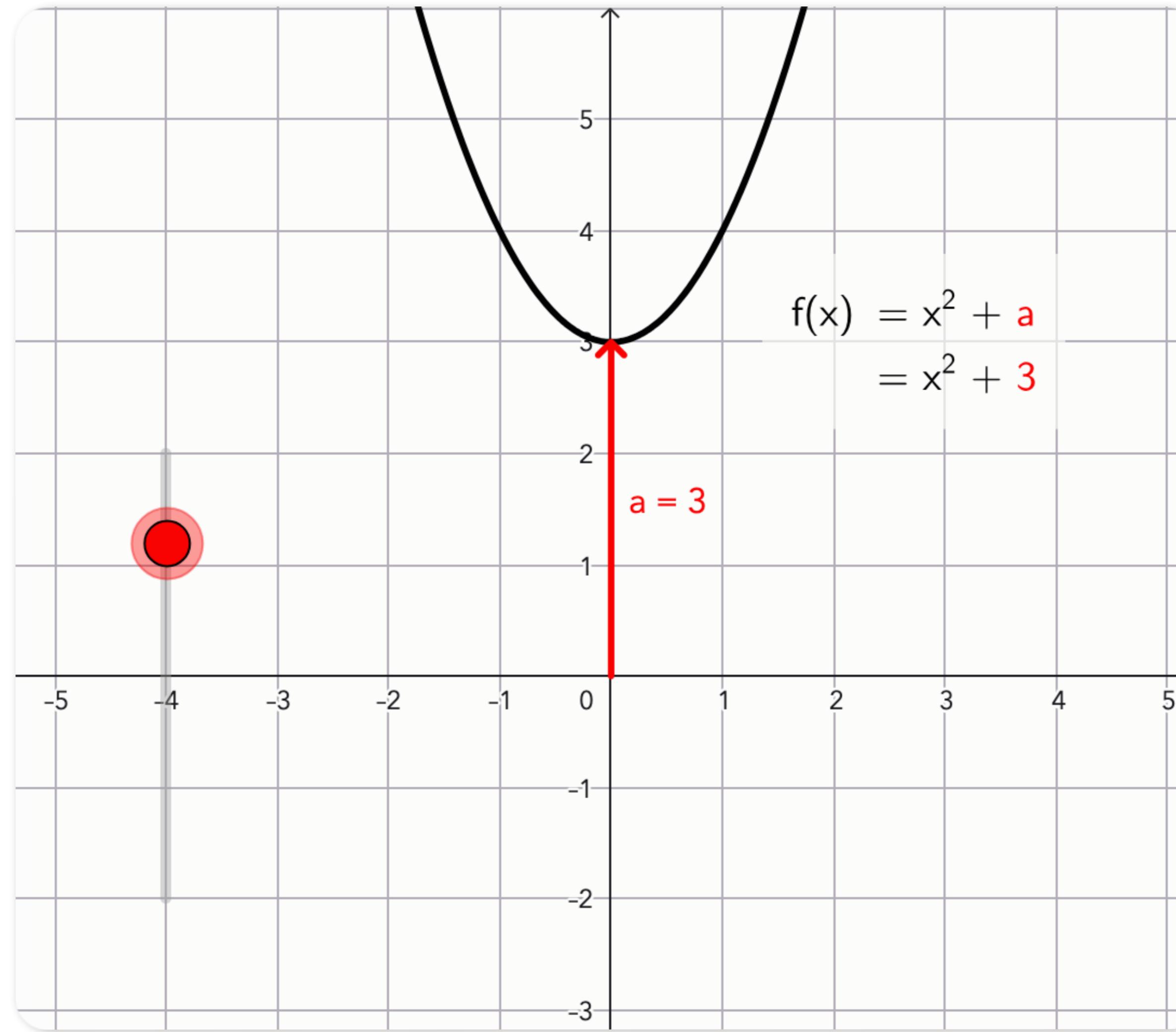


Gezieltes **Hervorheben** besonders wichtiger Informationen lenkt die Aufmerksamkeit der Lernenden.

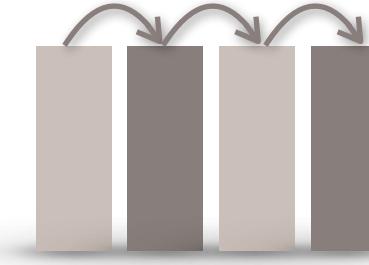


Nutze ein **einheitliches Markersystem** (z.B. Piktogramme oder Farbschemas), um **wichtige Informationen** hervorzuheben.

Signal-Prinzip



Prinzip der Segmentierung

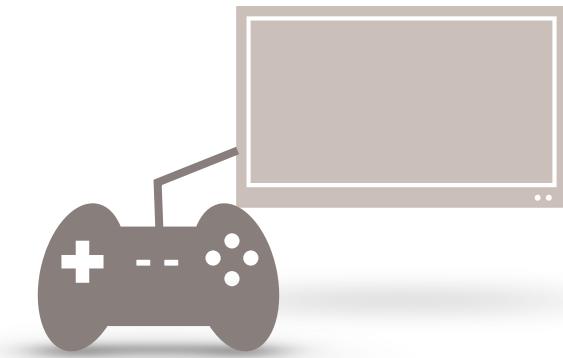


Kleinere **Segmente** sind besser als lange Sequenzen im Ganzen, vor allem bei komplexen Sachverhalten.



Teile die Inhalte in kleinere **Segmente** ein, die die Lernenden in ihrem eigenen Tempo bearbeiten können.

Prinzip der Interaktivität



Die Bereitstellung von **Nutzerkontrolle** kann zu einem tieferen Verständnis des Lerngegenstandes führen, vor allem bei Lernenden mit viel Vorwissen.

möglichst viel
Interaktivität?



Ermögliche den Lernenden Eingriffs- und Steuermöglichkeiten, die **lernrelevante kognitive Prozesse** anstoßen.

Prinzip der multiplen Repräsentationen

Repräsentationen ergänzen sich - nicht jede kann alles.

Unterschiedliche Darstellungen erfüllen unterschiedliche Funktionen (z. B. Entlastung, Erklärung, Vertiefung).

möglich
viele
Repräsentationen?



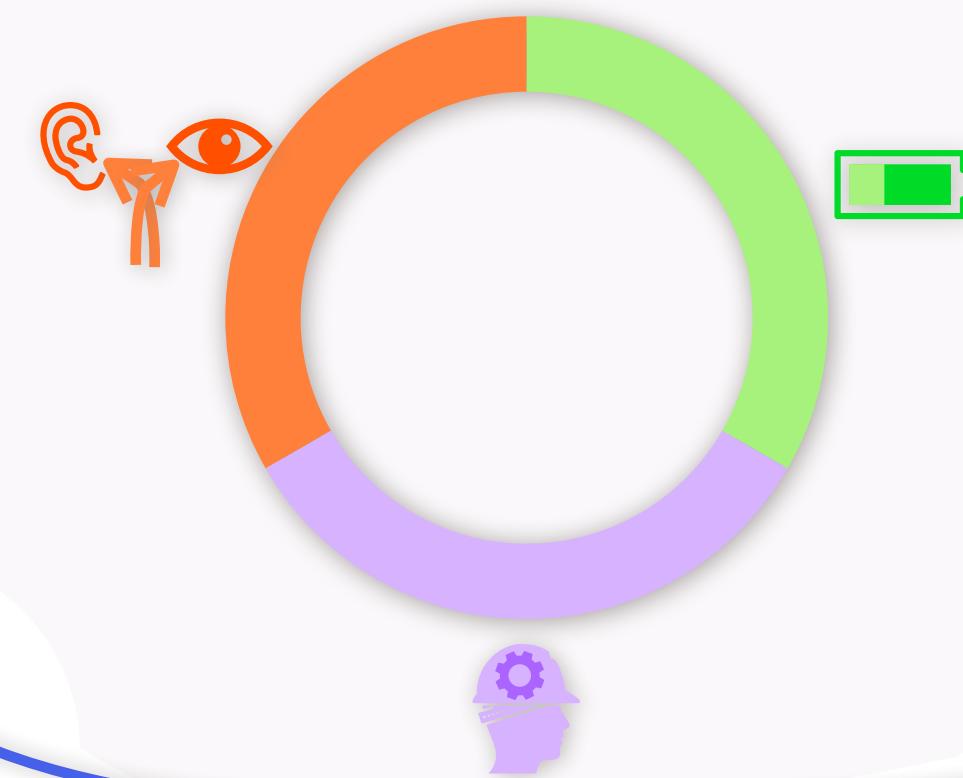
Verwende so viele Repräsentationen wie für das **Lernziel** nötig und gestalte sie so, dass Lernende zur **Verknüpfung** angeregt werden.

Recap

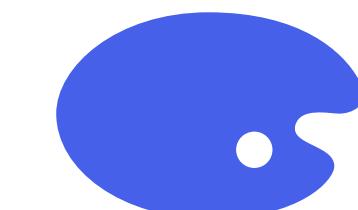
Struktureller Isomorphismus

Autonomie vom Original

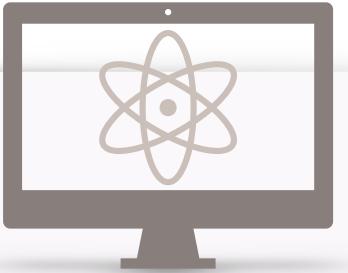
Berücksichtigung von Aspekten
menschlicher Informationsverarbeitung



Verwende so viele Repräsentationen wie für das **Lernziel** nötig und gestalte sie so, dass Lernende zur **Verknüpfung** angeregt werden.

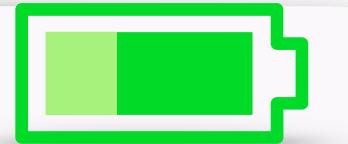


Gestaltungsprinzipien für Mathematik-VAMs



Kognitive Entlastung ermöglichen

→ Unwichtige Aktionen automatisieren;
Ressourcen fürs Denken freihalten



Handlungen erweitern

→ Visualisieren, was mit realen Materialien schwer möglich ist

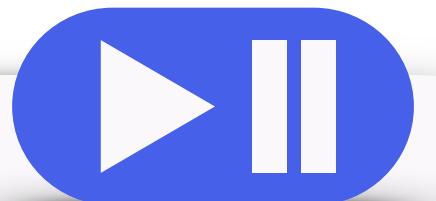
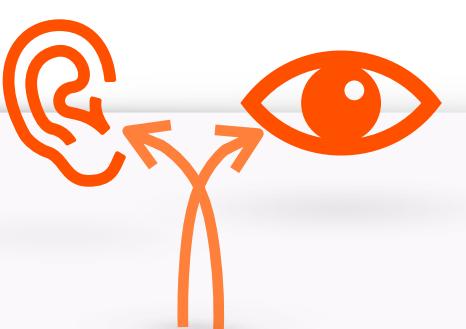


Mathematische Operationen abbilden

→ Interaktionen so designen, dass sie die intendierten mentalen Vorstellungen fördern

Darstellungen vernetzen

→ Beziehungen zwischen Repräsentationen sichtbar und nachvollziehbar machen



Flexible Interaktionen ermöglichen

→ Aktionen leicht ausführen, rückgängig machen und speichern

(Urff, 2014, S. 317)

Literatur

Bea, W., & Scholz, R. W. (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 16(3-4), 299-327. <https://doi.org/10.1007/BF03338820>

Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 8(2), 153-165. <https://doi.org/10.1007/BF00241022>

Heinecke, A. M., & Gerken, J. (2024). *Mensch-Computer-Interaktion: Basiswissen für Entwickler und Gestalter*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-67569-4>

Mayer, R. E., & Chandler, P. (2001). When learning is just a click away: Does simple user interaction foster deeper understanding of multimedia messages? *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 390-397. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.390>

Mayer, R. (2021). *Multimedia Learning* (3. Aufl.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316941355>

Mayer, R. E., & Fiorella, L. (Hrsg.). (2021). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (3. Aufl.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108894333>

Moyer-Packenham, P. S. (Hrsg.). (2016). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Bd. 7). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1>

Nielsen, J. (2020). *10 Usability Heuristics for User Interface Design* (1994-04-24 – Updated 2020-11-15). Nielsen Norman Group. Zugriff auf <https://www.nngroup.com/articles/ten-usability-heuristics/>

Literatur

- Reinhold, F. (2019). Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive: Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23924-4>
- Urrff, C. (2014). Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen: Theoretische Analysen, empirische Fallstudien und praktische Umsetzung anhand der Entwicklung virtueller Arbeitsmittel. Mensch und Buch Verlag.
- Walter, D. (2018). Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-19067-5>