

Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

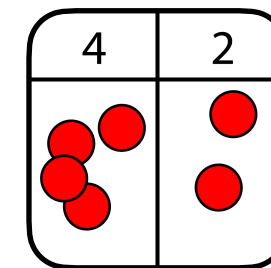
# **Stoffdidaktik Mathematik**

Kapitel 10 – Exkurs: Virtuelle Arbeitsmittel

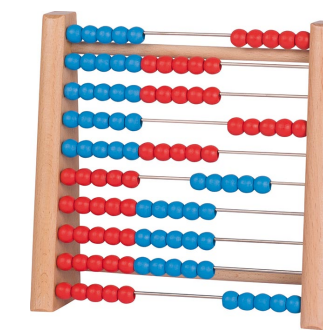
# Virtuelle Arbeitsmittel



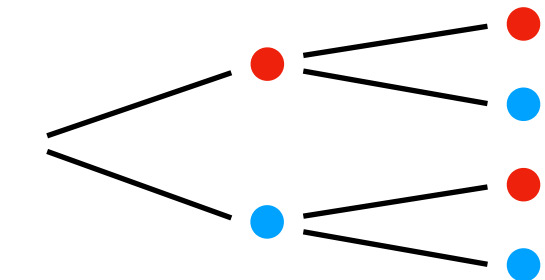
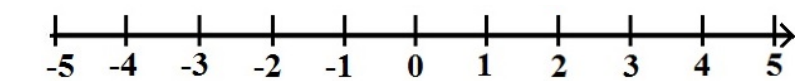
## Arbeitsmittel



enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

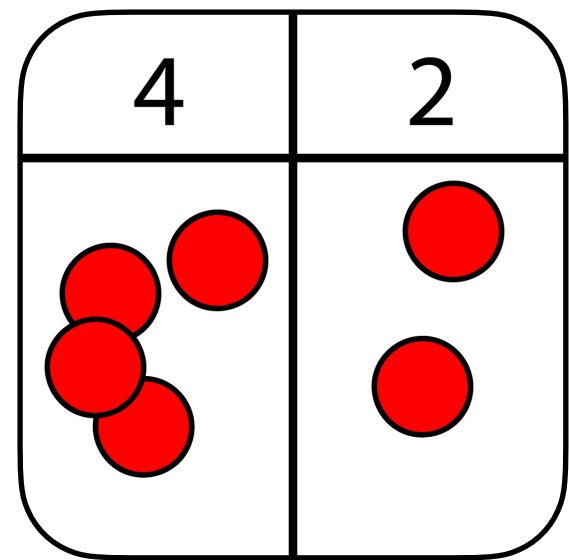


macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich



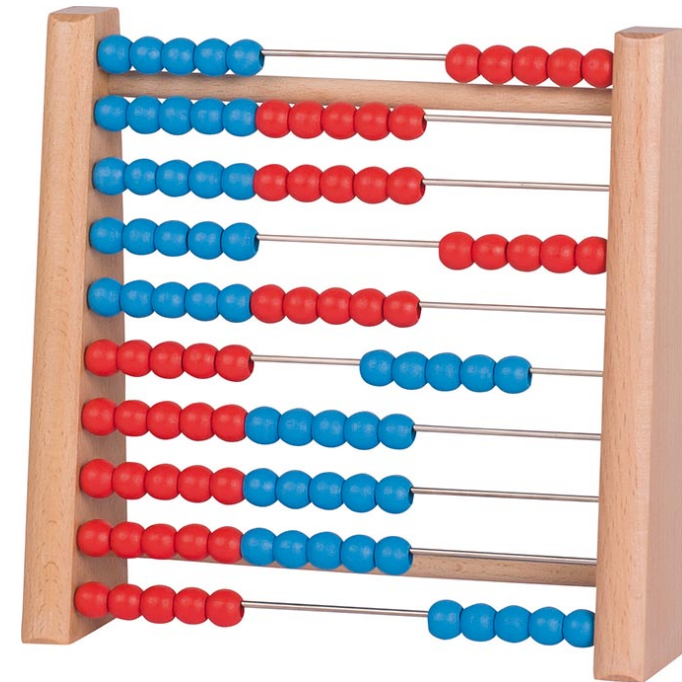
ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

# Arbeitsmittel



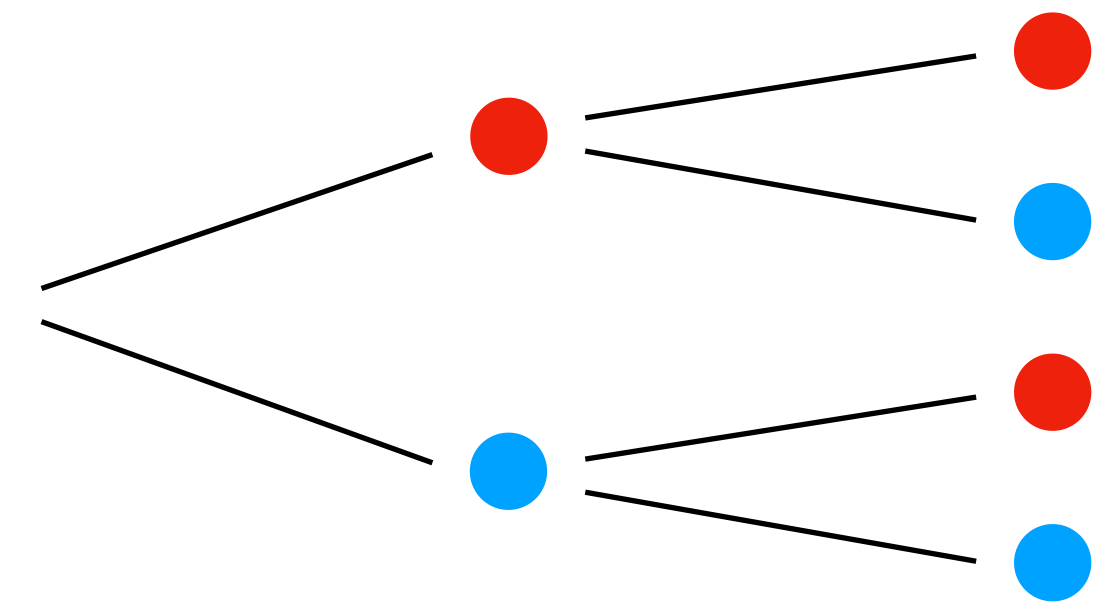
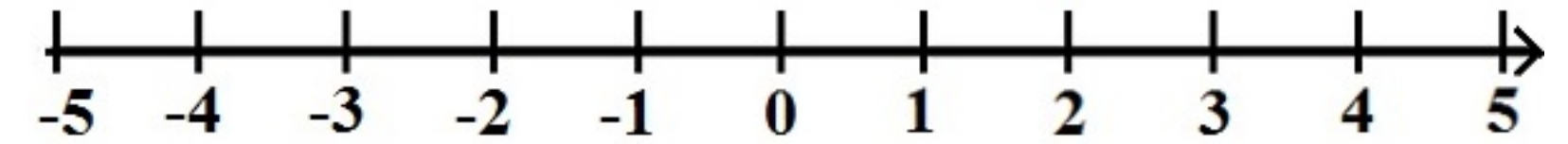
## abstrakt

enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen



## anschaulich

macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich



## operierbar

ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

# ... und **virtuell**?

„Ein virtuelles Arbeitsmittel ist eine **interaktive, technologiegestützte** visuelle Darstellung eines dynamischen **mathematischen Objekts**, einschließlich aller programmierbaren Funktionen, die seine Manipulation ermöglichen und Möglichkeiten zum **Aufbau mathematischer Kenntnisse** bieten.“

(Moyer-Packenham & Bolyard, 2016)

# ... und **virtuell**?

- **interaktiv:** Verhalten, Reaktionen und Rückmeldungen sind implementiert
- **technologiegestützt:** Entwicklung in verschiedenen digitalen Umgebungen und mit jedem technischen Werkzeug entwickelt werden; nutzbar auf jedem digitalen Gerät
- **mathematisches Objekt:** Begriff / Zusammenhang / Verfahren
- **Aufbau mathematischer Kenntnisse:** Lerngelegenheiten eröffnen, nicht nur Bedienhandlungen

(Moyer-Packenham & Bolyard, 2016)

# Der Epsilonschlauch

# Warum ...

... sieht das so aus wie es aussieht

... verhält sich das so?

Eine Folge  $a_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$

heißt konvergent gegen den Grenzwert  $a \in \mathbb{Q}$ ,

1. Folge  $a_n$  definieren

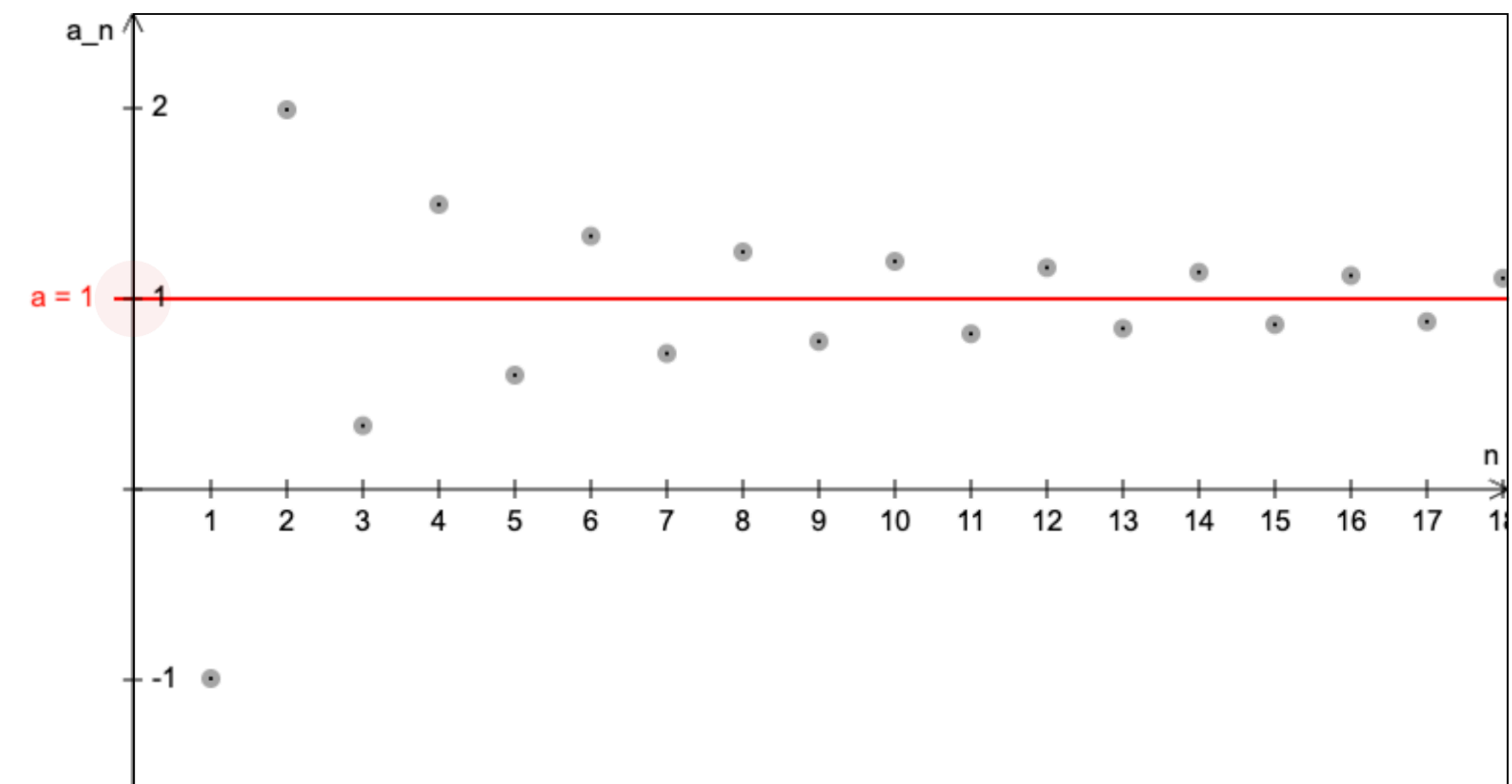
2. Kandidat für  $a$  festlegen

3.  $\varepsilon > 0$  wählen

4.  $n_0 \in \mathbb{N}$  finden

5. Ungleichung prüfen

$a_n = 1 + (-1)^{n*2/n}$





# Darum!

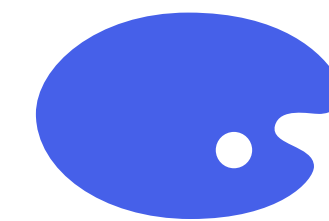
„Lernen mit (virtuellen) Arbeitsmitteln bewegt sich immer zwischen *abstraktem Konzept* und *visueller Anschauung*.“

**Ziel:** Verständnis entsteht, wenn *beides kooperiert*.

**Inhalt**



**Design**



(Fischbein, 1977)



Was muss alles  
drinstecken?

Inhalt

Wie sollte das  
gestaltet sein?

Design

Implemen-  
tierung

Wie wird es  
eingesetzt?

(in Anlehnung an Reinhold, 2019)





# Was muss alles drinstecken?

## Definition

Wir betrachten eine rationale Folge  $a_n: \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Q}$  mit der Zuordnung  $n \mapsto a_n$ .

Die Folge heißt *konvergent gegen*  $a \in \mathbb{Q}$ , wenn es für jedes  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so dass für alle  $n \geq n_0$  gilt:  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

# Was muss alles drinstecken?

## Bedeutung

„Ich finde zu jeder **noch so kleinen**  $\varepsilon$ -Umgebung ein  $n_0$ , ab dem alle Folgenglieder in dieser Umgebung liegen.“

- statischer Aspekt des Grenzwertbegriffs
- Umgebungsvorstellung

# Was muss alles drinstecken?

## Kernidee

Eine Folge konvergiert gegen  $a \in \mathbb{Q}$ , wenn ich für jedes noch so kleine  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  finde, ab dem alle Folgenglieder in der  $\varepsilon$ -Umgebung um  $a$  liegen.

# Anforderungen an „graphische Modelle“

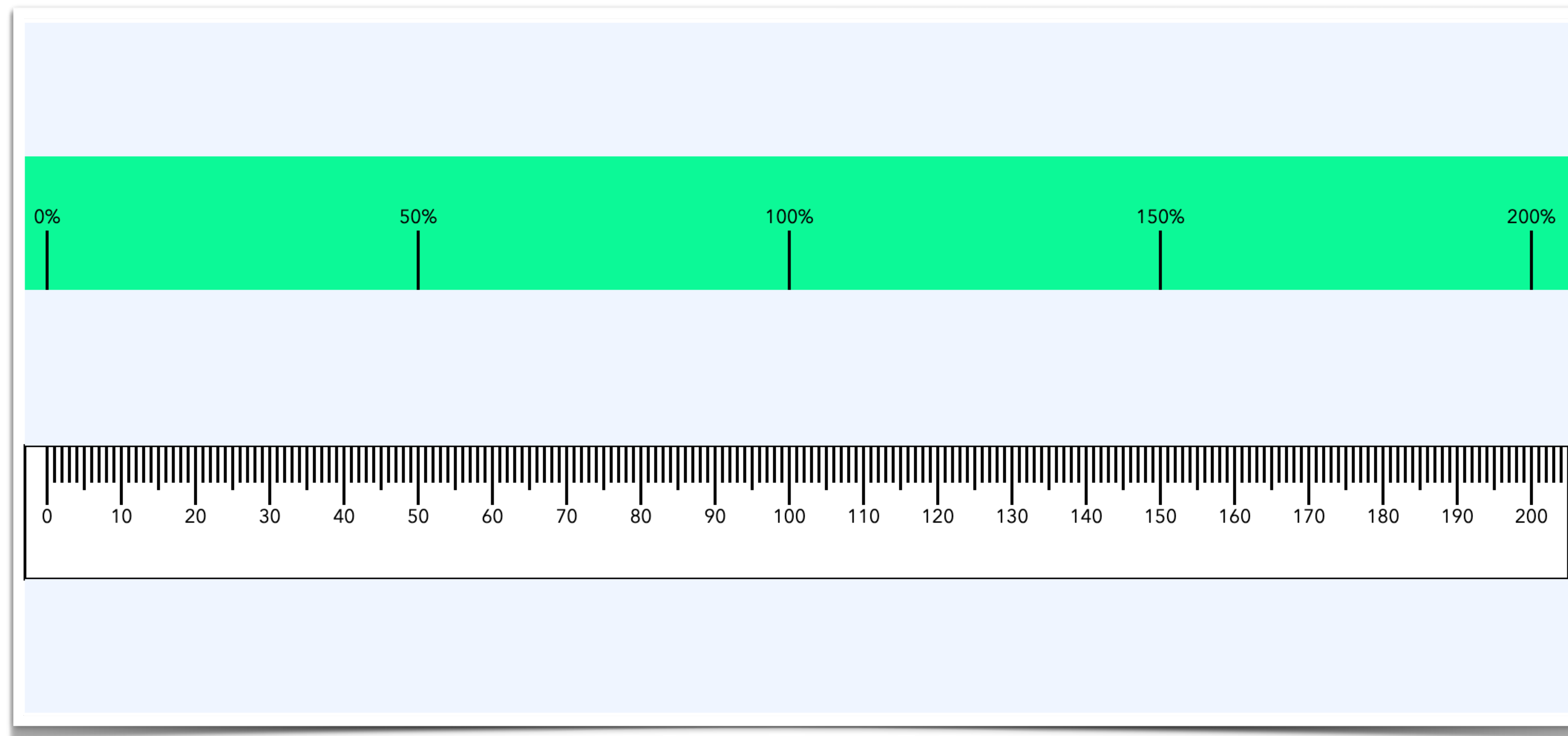
**Struktureller Isomorphismus**

**Autonomie vom Original**

**Berücksichtigung von Aspekten  
menschlicher Informationsverarbeitung**

(Fischbein, 1977)

# Beispiel: der Prozentstreifen



<https://www.ed.math.lmu.de/research/vipro/Prozentband.html>

# Struktureller Isomorphismus

## Was meint das?

das Arbeitsmittel soll „ein hohes Maß an struktureller Übereinstimmung mit dem Original aufweisen, d.h. alle relevanten Sachverhalte enthalten“

→ stoffdidaktische Analyse

**abstrakt**

enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

(Bea und Scholz, 1995)



# Autonomie vom Original

„eine gewisse Autonomie gegenüber dem Original besitzen, d.h. nicht nur in Verbindung mit ihm, sondern an Stelle des Originals eingesetzt werden können.“

→ eigenständiges „Denkwerkzeug“

**operierbar**

ermöglicht, Handlungen durchzuführen,  
die der Aneignung des Wesens des  
Lerngegenstands dienlich sind

(Bea und Scholz, 1995)



# Berücksichtigung von Aspekten menschlicher Informationsverarbeitung

„[...]durch ihre **erhöhte kognitive Zugänglichkeit** vor allem für didaktische Zwecke zusätzlich bessere Eigenschaften besitzen als das Original.“



Kognitive **Theorie** multimedialen Lernens



Design**prinzipien** multimedialen Lernens

**Didaktisches Potenzial!**

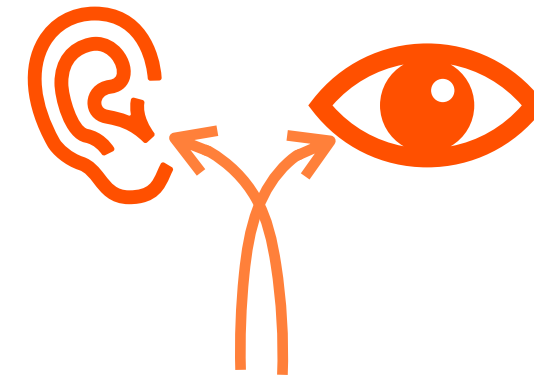
**anschaulich**

macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich

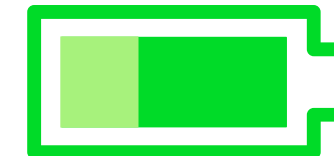
(Bea und Scholz, 1995; Mayer, 2021)

# Kognitive **Theorie** multimedialen Lernens

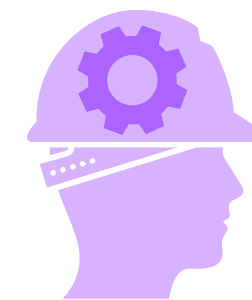
1. **Dual-Channel-Annahme**



2. **Limited-Capacity-Annahme**



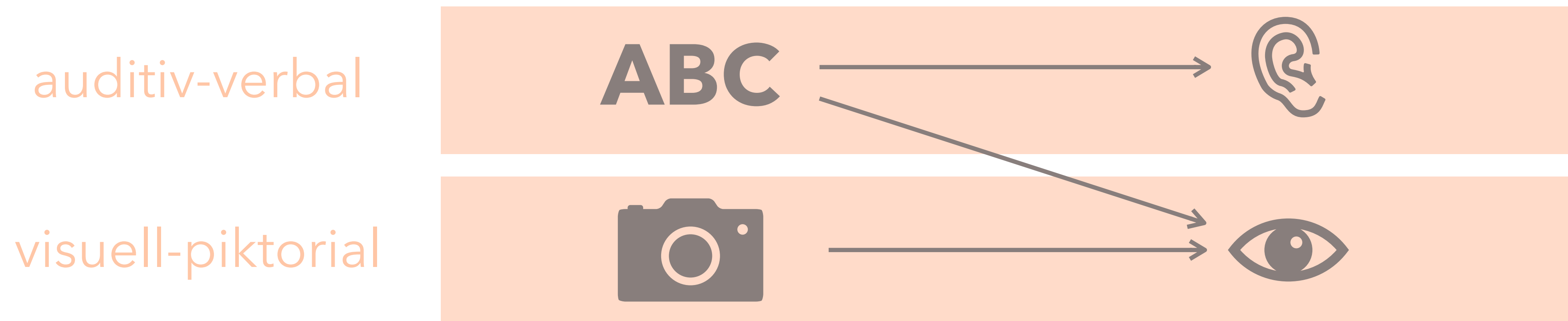
3. **Active-Processing-Annahme**



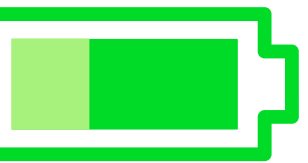
(Mayer, 2021)

# Dual-Channel-Annahme

## Repräsentationsformen Sinnesmodalitäten



(Mayer, 2021)



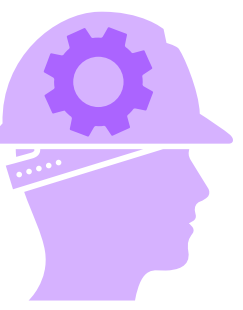
# Limited-Capacity-Annahme

## Arbeitsgedächtnis

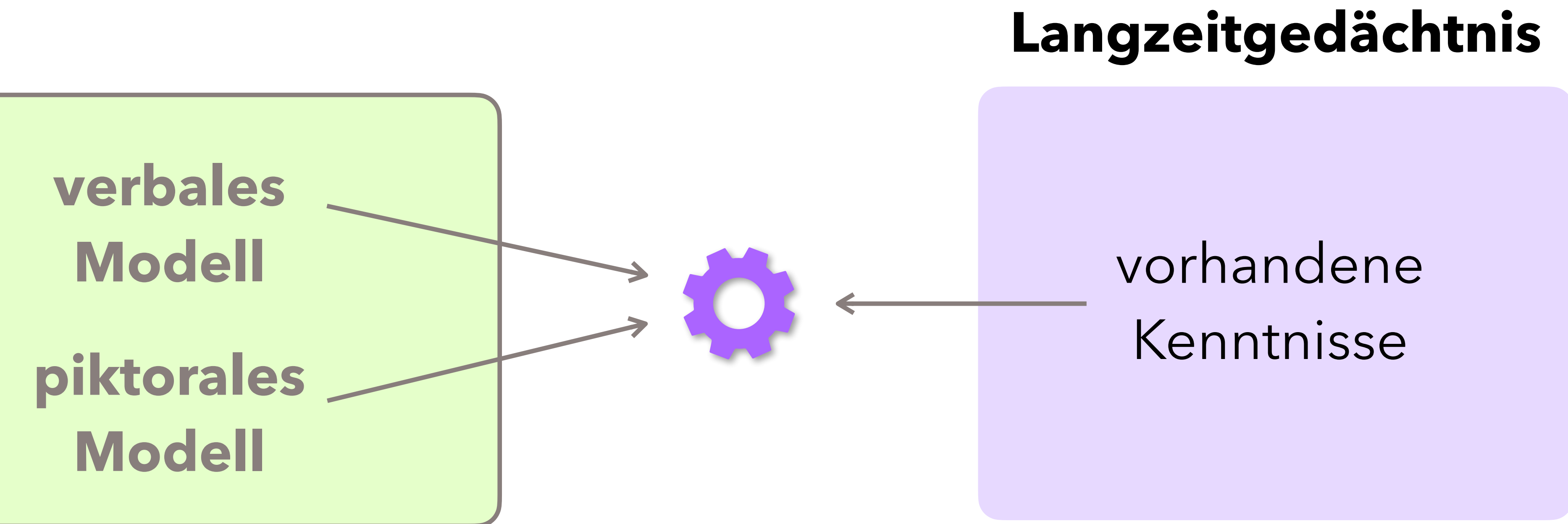


Lernprozesse sind nur effektiv, wenn die kognitive Belastung im Arbeitsgedächtnis innerhalb der Kapazitätsgrenze bleibt.

(Mayer, 2021)



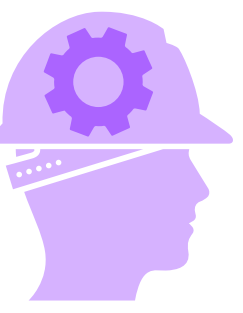
# Active-Processing-Annahme



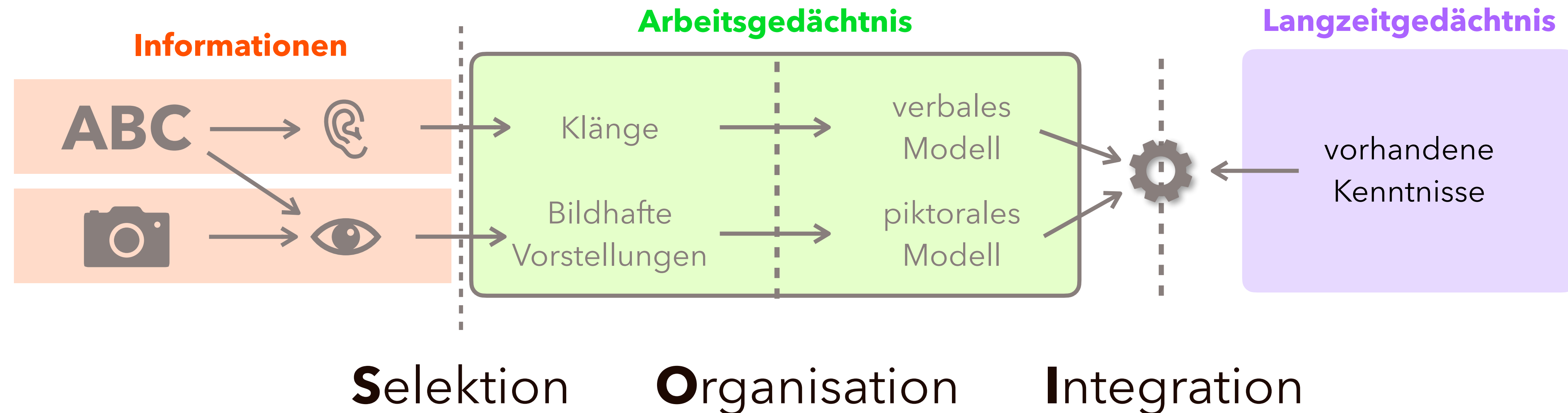
Lernen passiert nicht durch reine Aufnahme, sondern durch  
**aktive mentale Arbeit**

(Mayer, 2021)





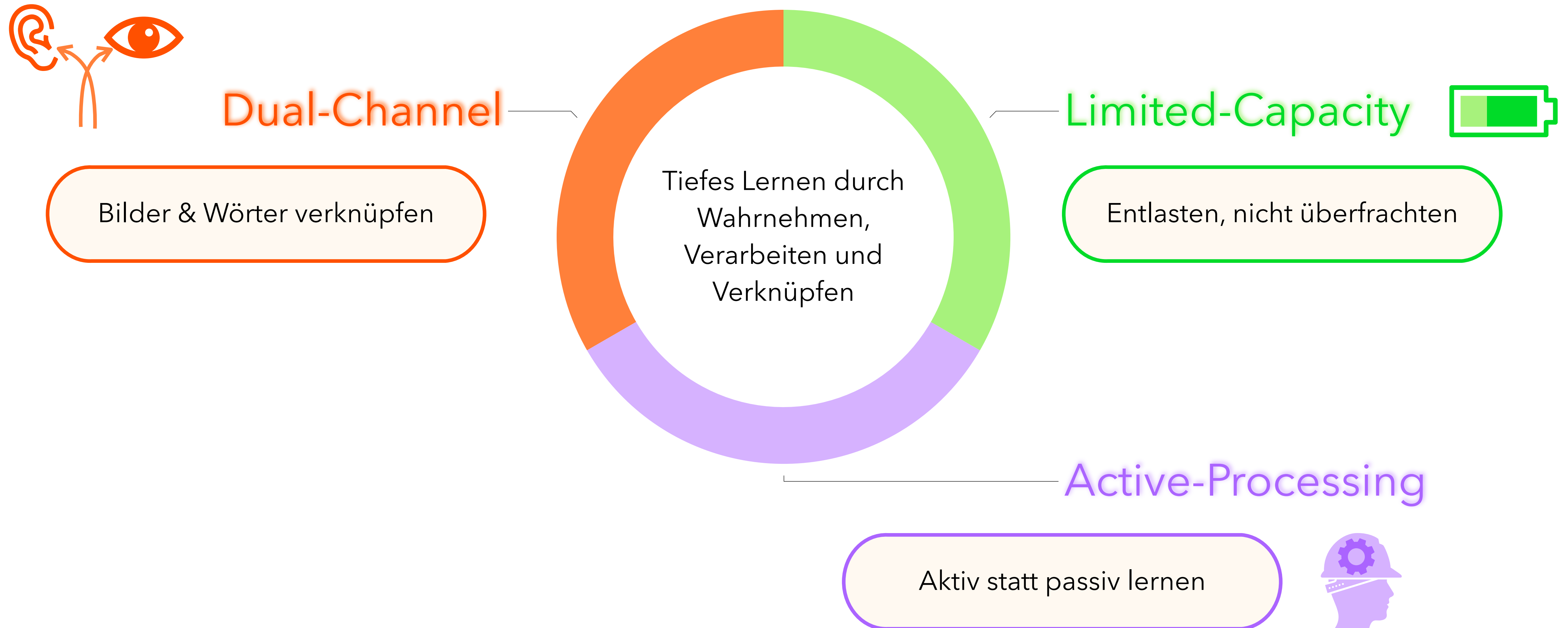
# Active-Processing-Annahme



→ gute VAMs unterstützen diese drei Schritte

(Mayer, 2021)

# Überblick: Kognitive Theorie des multimedialen Lernens



# Human Computer Interaction

## **Zehn Heuristiken für User Interface Design**

(Nielsen, 2024)

1. Sichtbarkeit des Systemzustands)
2. Übereinstimmung zwischen System und wirklicher Welt
3. Steuerung durch die Benutzer und Entscheidungsfreiheit
4. Konsistenz und Standards
5. Fehlervermeidung)
6. Wiederkennen statt sich erinnern
7. Flexibilität und Effizienz des Gebrauchs)
8. Ästhetisches und minimalistisches Design
9. Benutzern helfen, Fehler zu bemerken, zu durchschauen und zu beheben)
10. Hilfe und Dokumentation

## **Acht goldene Regeln**

(Schneidermann, 2016)

1. Strebe Konsistenz an.
2. Strebe universelle Usability an.
3. Biete informative Rückmeldungen an.
4. Gestalte Dialoge so, dass sie in sich abgeschlossen sind.
5. Verhindere Fehler.
6. Erlaube einfaches Rückgängigmachen von Aktionen.
7. Belasse den Benutzern die Steuerung.
8. Entlaste das Kurzzeitgedächtnis.

## **fundamentalen Prinzipien der Interaktion**

(Norman, 2016)

1. Angebotscharakter
2. Signifikanz/Bedeutung
3. Bedingungen
4. Abbildungen
5. Rückmeldung

## **Grundprinzipien des Interaktionsdesigns**

(Tognazzi, 2014)

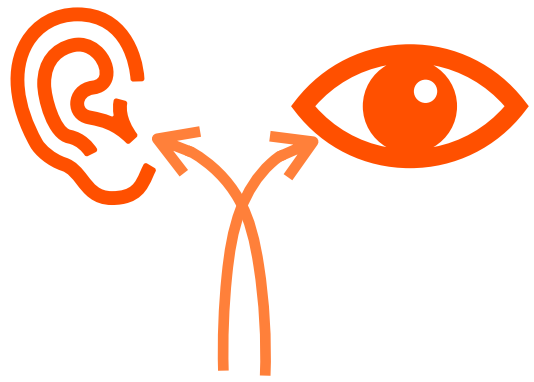
1. Ästhetik
2. Antizipation
3. Handlungsfreiheit
4. Farbe
5. Konsistenz
6. Voreinstellungen
7. Auffindbarkeit
8. Effizienz des Benutzers
9. Explorierbare Schnittstellen
10. Fitts'Gesetz
11. Schnittstellenobjekte
12. Wartezeitverringerung
13. Erlernbarkeit
14. Metaphern
15. Sicherung der Arbeit der Benutzer
16. Lesbarkeit
17. Einfachheit
18. Statusinformation
19. Sichtbare Schnittstellen



# *Designprinzipien*

... die sich aus der kognitiven Theorie  
multimedialen Lernens ableiten lassen

# Designprinzipien



## Prinzipien zur Förderung generativer Lernprozesse:

- Multimediaprinzip
- Personalisierungsprinzip
- Bildprinzip
- Sprachprinzip
- Embodiment-Prinzip
- Prinzip der generativen Aktivität
- Immersionsprinzip

## weitere Prinzipien:

- Prinzip der geteilten Aufmerksamkeit
- Prinzip des ausgearbeiteten Beispiels
- Prinzip der flüchtigen Informationen
- Prinzip der Zusammenarbeit
- Prinzip der Animationskomposition
- Prinzip der Interaktivität
- Prinzip der multiplen Repräsentationen
- Expertise Reversal Effect
- ...

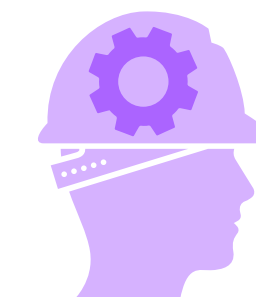
## Prinzipien zur Reduktion extrinsischer Belastungen:

- Kohärenz-Prinzip
- Signal-Prinzip
- Redundanz-Prinzip
- Prinzip der räumlichen Nähe
- Prinzip der simultanen Darstellung



## Prinzipien zur Verwaltung essenzieller Lernprozesse:

- Segmentierungs Prinzip
- Prinzip des Pre-Trainings
- (Multi)modalitäts-Prinzip





# Multimedia-Prinzip

## Multimedia-Prinzip

Dieses Prinzip besagt, dass eine Kombination von Text und Grafik im Allgemeinen besser den Lernprozess unterstützt als Text allein. In einer Reihe von Studien konnte das Multimediaprinzip deutlich bestätigt werden (Levie & Lentz 1982; Levie, Anglin & Carney 1987; Mayer & Anderson 1991; zusammengefasst in Mayer 2001). Entscheidend ist, dass Grafiken und Text sinnvoll miteinander kombiniert werden, beispielsweise wenn Bildfolgen (Animationen) und erläuternder Text zeitlich aufeinander synchronisiert werden (Mayer & Anderson 1991). In Untersuchungen zeigten sich als lernwirksam:

- Grafiken zur thematischen Organisation die z.B. Beziehungen zwischen Themengebieten aufzeigen,
- Grafiken zur Veranschaulichung von Beziehungen und
- Grafiken als Schnittstelle zur Aufgabe.

## Multimedia-Prinzip



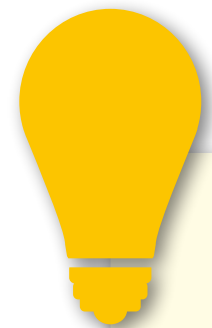
Nutze eine Kombination aus **Wörtern** und **Bildern**.



# Multimedia-Prinzip



Die Kombination von **Wörtern** und **Bildern** unterstützt den Lernprozess im Allgemeinen besser als Text allein.



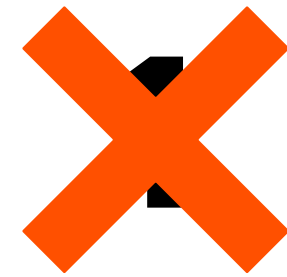
Nutze eine Kombination aus **Wörtern** und **Bildern**.

# Kohärenz-Prinzip

**1**

**2**

# Kohärenz-Prinzip

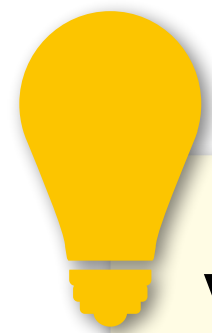


2

# Kohärenz-Prinzip

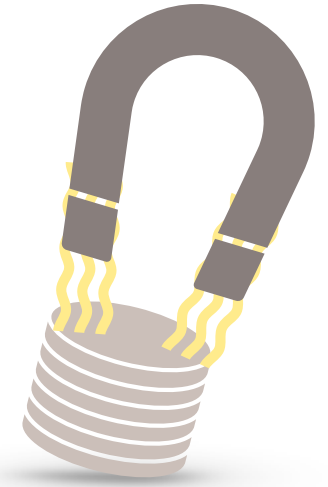


Multiple Darstellungen in Lernangeboten müssen **inhaltlich** mit dem Lerngegenstand und -ziel **zusammenhängen**.



**Verzichte** in multimedialen Lernumgebungen auf interessante, aber für die Erreichung des intendierten Lernziels **irrelevante** Inhalte.

# Prinzip der räumlichen Nähe

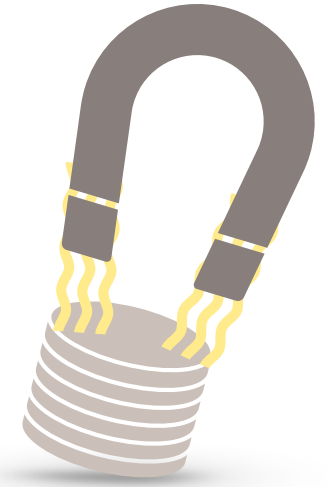


**Räumlich benachbarte** Darstellung textueller und bildlicher Informationen fördern den Wissenserwerb mehr als eine getrennte Präsentation von Texten und Bildern.

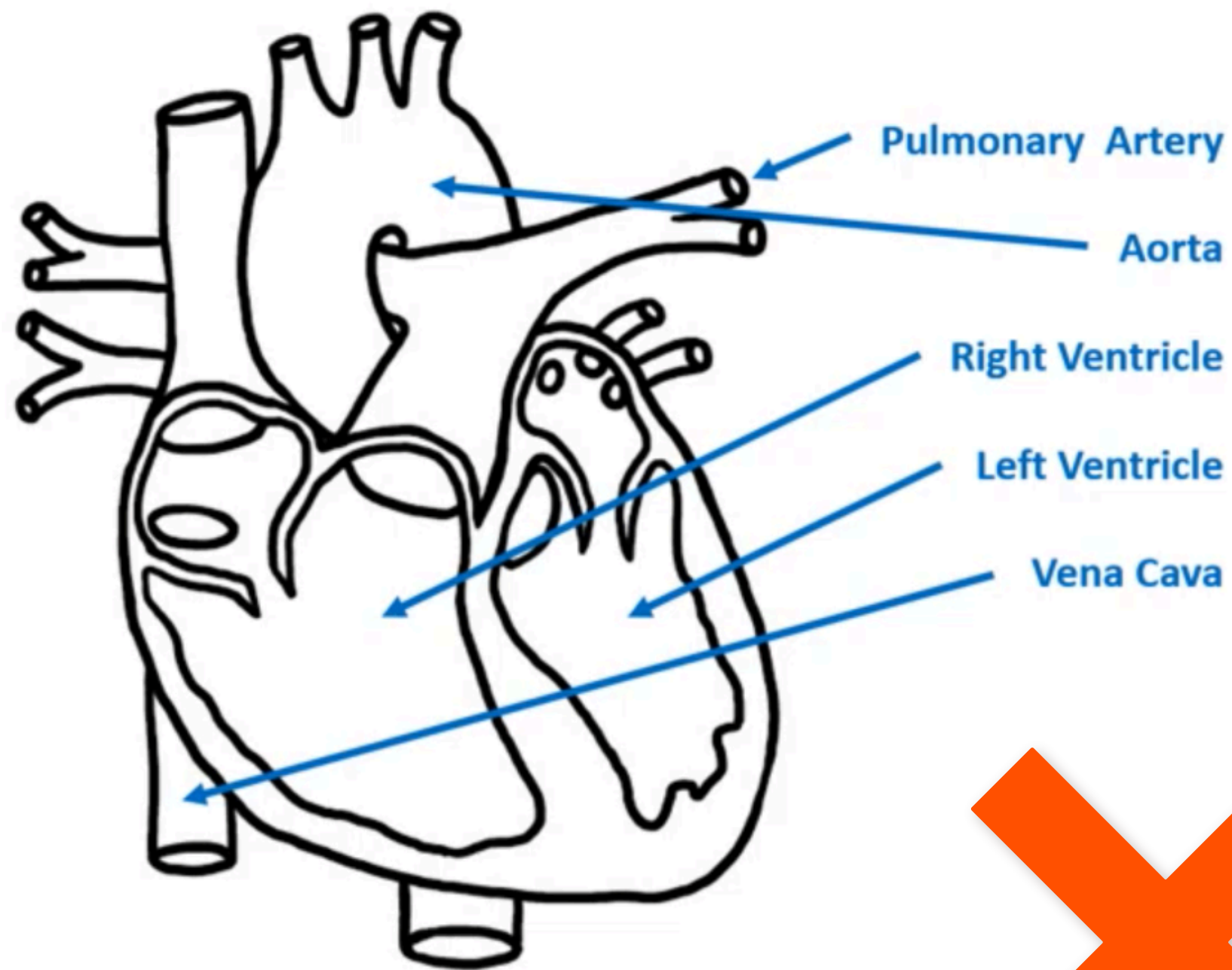


Platziere zusammengehörende Worte und Grafiken **nahe beieinander**.

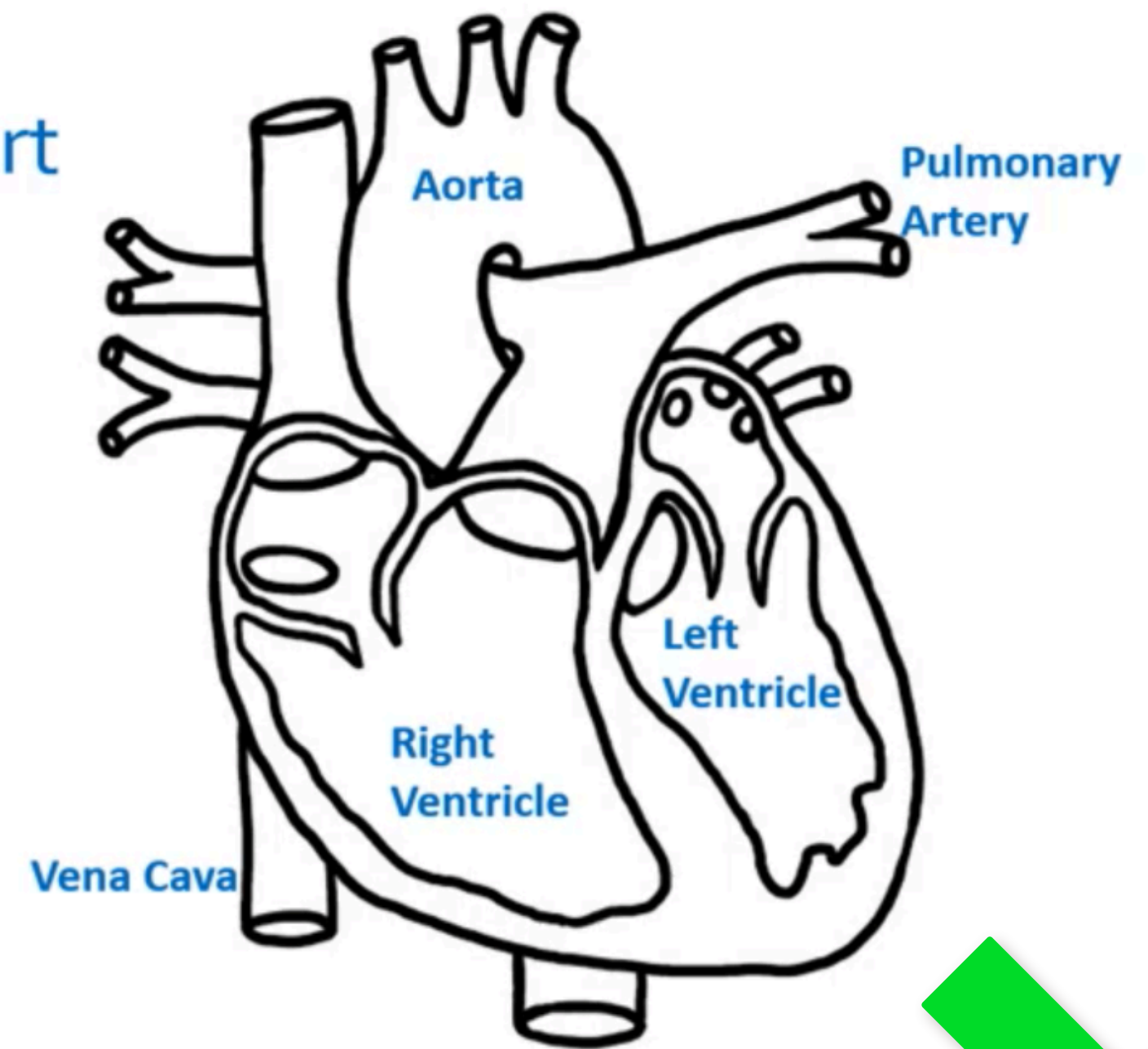
# Prinzip der räumlichen Nähe



The Heart

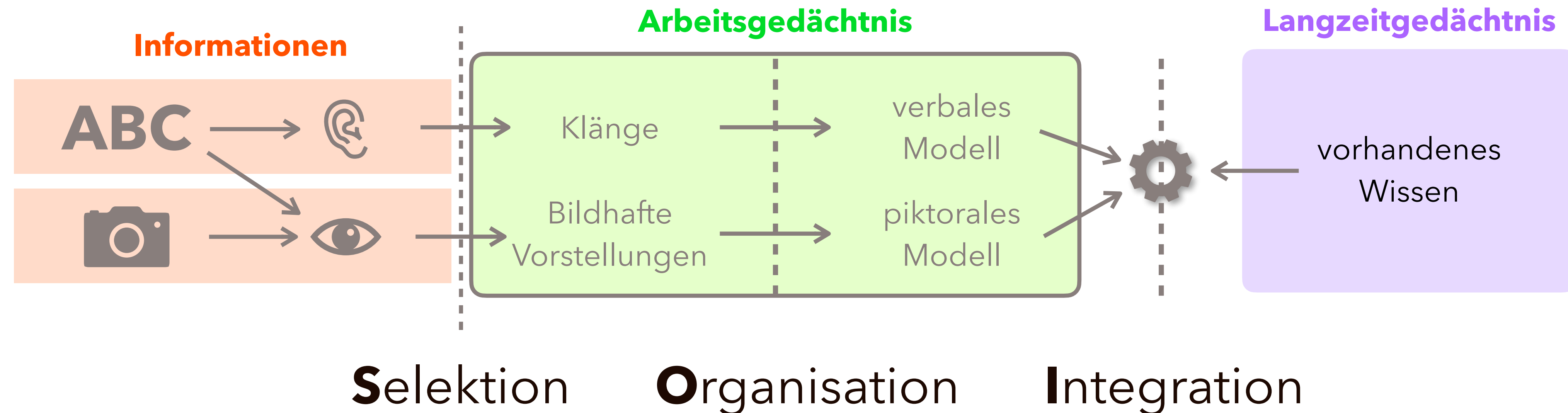


The Heart

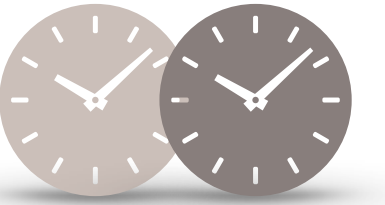




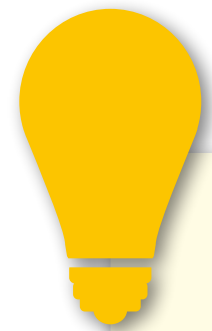
# Prinzip der simultanen Darstellung



# Prinzip der simultanen Darstellung



Die gleichzeitige Präsentation bildlicher und sprachlicher Informationen fördert den Wissenserwerb mehr, als die sukzessive Präsentation der gleichen Inhalte.

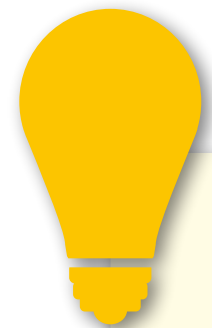


Stelle zusammengehörige Informationen **gleichzeitig** dar.

# Signal-Prinzip

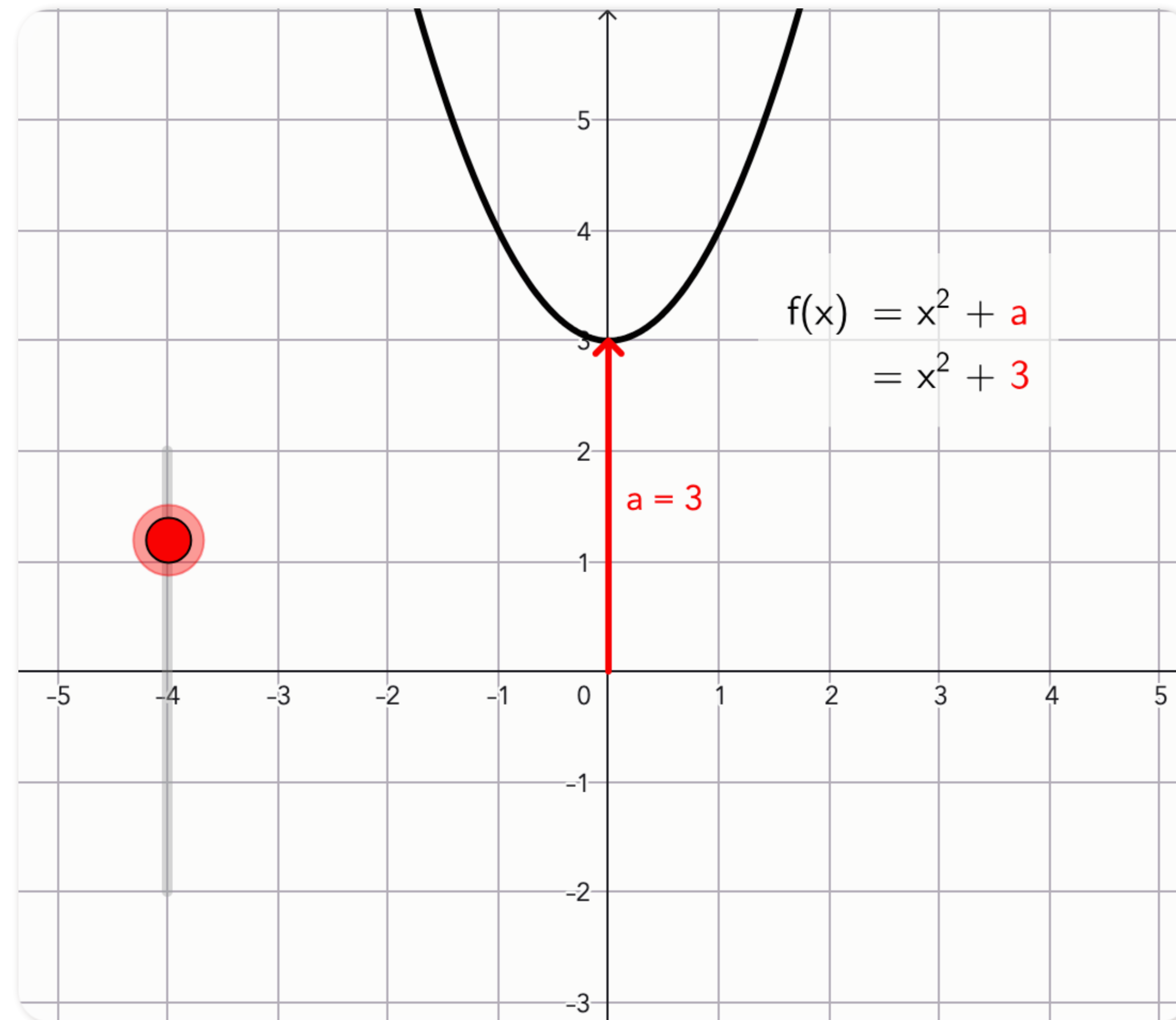


Gezieltes **Hervorheben** besonders wichtiger Informationen lenkt die Aufmerksamkeit der Lernenden.

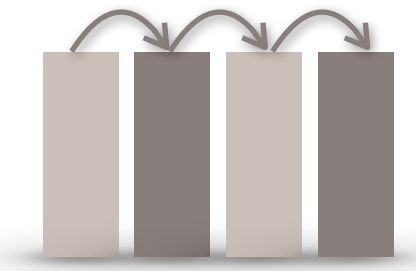


Nutze ein **einheitliches Markersystem** (z.B. Piktogramme oder Farbschemas), um **wichtige Informationen** hervorzuheben.

# Signal-Prinzip



# Prinzip der Segmentierung

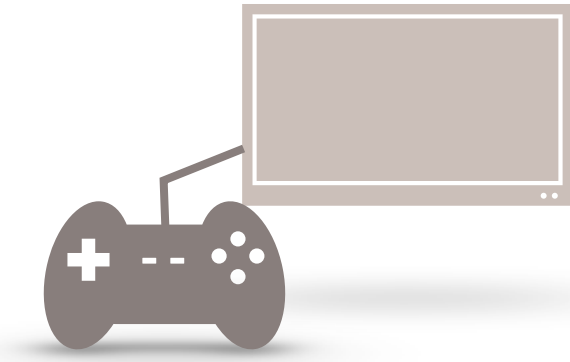


Kleinere **Segmente** sind besser als lange Sequenzen im Ganzen, vor allem bei komplexen Sachverhalten.



Teile die Inhalte in kleinere **Segmente** ein, die die Lernenden in ihrem eigenen Tempo bearbeiten können.

# Prinzip der Interaktivität



Die Bereitstellung von **Nutzerkontrolle** kann zu einem tieferen Verständnis des Lerngegenstandes führen, vor allem bei Lernenden mit viel Vorwissen.

**möglichst viel  
Interaktivität?**

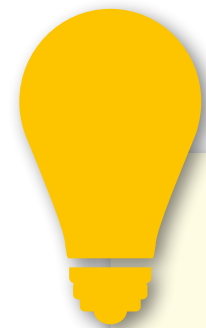


Ermögliche den Lernenden Eingriffs- und Steuermöglichkeiten, die **lernrelevante kognitive Prozesse** anstoßen.

# Prinzip der multiplen Repräsentationen

Repräsentationen ergänzen sich – nicht jede kann alles.  
Unterschiedliche Darstellungen erfüllen unterschiedliche  
Funktionen (z. B. Entlastung, Erklärung, Vertiefung).

möglichst viele  
Repräsentationen?



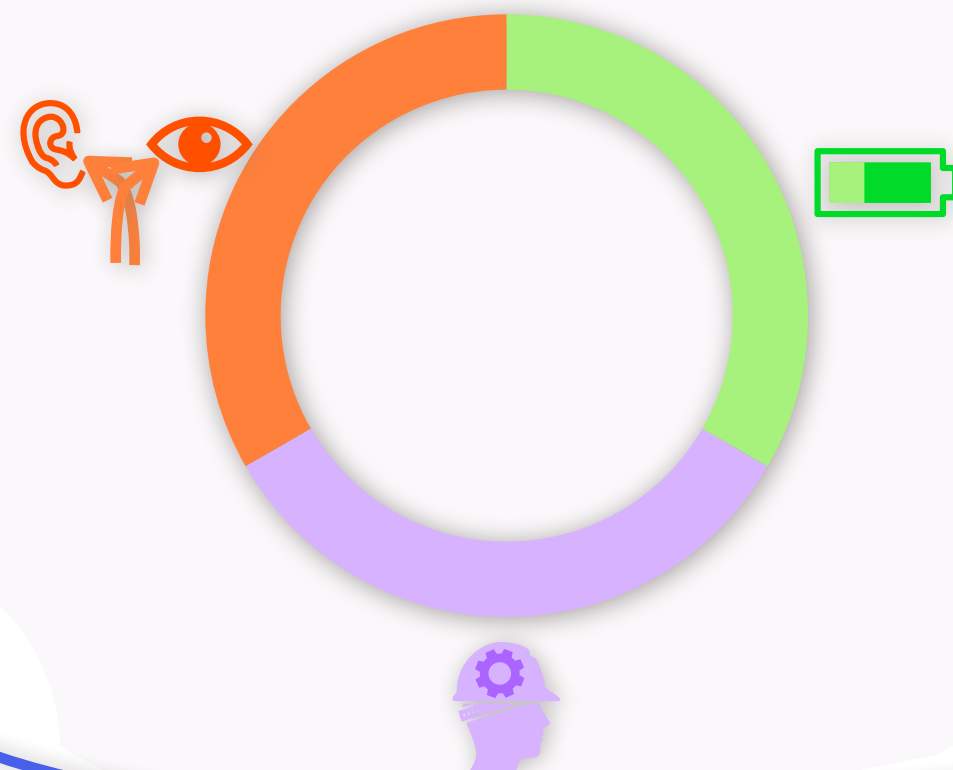
Verwende so viele Repräsentationen wie für das **Lernziel** nötig und  
gestalte sie so, dass Lernende zur **Verknüpfung** angeregt werden.

# Recap

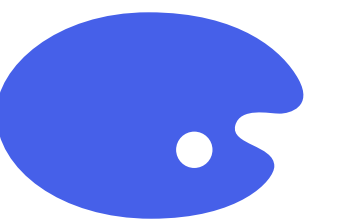
Struktureller Isomorphismus

Autonomie vom Original

Berücksichtigung von Aspekten  
menschlicher Informationsverarbeitung



Verwende so viele Repräsentationen wie für das **Lernziel** nötig und gestalte sie so, dass Lernende zur **Verknüpfung** angeregt werden.





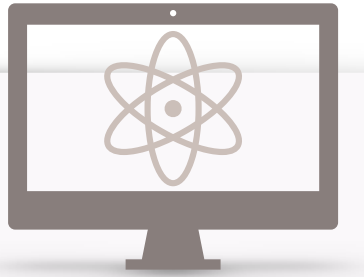
# Gestaltungsprinzipien für Mathematik-VAMs

**Kognitive Entlastung** ermöglichen  
→ Unwichtige Aktionen automatisieren;  
Ressourcen fürs Denken freihalten

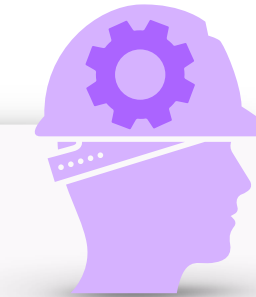


**Handlungen erweitern**

→ Visualisieren, was mit realen  
Materialien schwer möglich ist

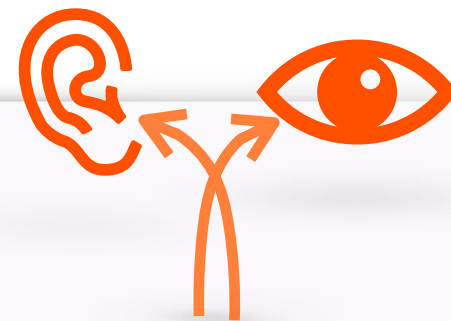


**Mathematische Operationen** abbilden  
→ Interaktionen so designen, dass sie die  
intendierten mentalen Vorstellungen fördern

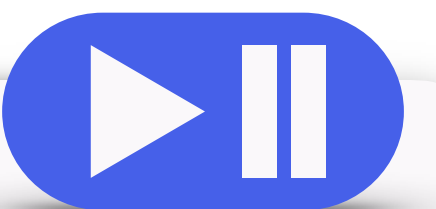


**Darstellungen vernetzen**

→ Beziehungen zwischen Repräsentationen  
sichtbar und nachvollziehbar machen



**Flexible Interaktionen** ermöglichen  
→ Aktionen leicht ausführen, rückgängig  
machen und speichern



(Urff, 2014, S. 317)

- Bea, W., & Scholz, R. W. (1995). Graphische Modelle bedingter Wahrscheinlichkeiten im empirisch-didaktischen Vergleich. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 16(3-4), 299-327. <https://doi.org/10.1007/BF03338820>
- Fischbein, E. (1977). Image and concept in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 8(2), 153-165. <https://doi.org/10.1007/BF00241022>
- Heinecke, A. M., & Gerken, J. (2024). *Mensch-Computer-Interaktion: Basiswissen für Entwickler und Gestalter*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-67569-4>
- Mayer, R. E., & Chandler, P. (2001). When learning is just a click away: Does simple user interaction foster deeper understanding of multimedia messages? *Journal of Educational Psychology*, 93(2), 390-397. <https://doi.org/10.1037/0022-0663.93.2.390>
- Mayer, R. (2021). *Multimedia Learning* (3. Aufl.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781316941355>
- Mayer, R. E., & Fiorella, L. (Hrsg.). (2021). *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (3. Aufl.). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/9781108894333>
- Moyer-Packenham, P. S. (Hrsg.). (2016). *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives* (Bd. 7). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-32718-1>
- Nielsen, J. (2020). 10 Usability Heuristics for User Interface Design (1994-04-24 – Updated 2020-11-15). Nielsen Norman Group. Zugriff auf <https://www.nngroup.com/articles/ten-usability-heuristics/>

Reinhold, F. (2019). Wirksamkeit von Tablet-PCs bei der Entwicklung des Bruchzahlbegriffs aus mathematikdidaktischer und psychologischer Perspektive: Eine empirische Studie in Jahrgangsstufe 6. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-23924-4>

Urff, C. (2014). Digitale Lernmedien zur Förderung grundlegender mathematischer Kompetenzen: Theoretische Analysen, empirische Fallstudien und praktische Umsetzung anhand der Entwicklung virtueller Arbeitsmittel. Mensch und Buch Verlag.

Walter, D. (2018). Nutzungsweisen bei der Verwendung von Tablet-Apps. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-19067-5>