Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

# Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 8 – Zusammenhänge und Verfahren

# Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 8 – Zusammenhänge und Verfahren

- Sie kennen prinzipielle Möglichkeiten, Zusammenhänge und Verfahren einzuführen, Aneignungsprozesse mithilfe von Orientierungshilfen zu gestalten und die Inhalte zu festigen.
- Sie erkennen Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den typischen Vorgehensweisen für Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren.

# Typische Unterrichtssituationen

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung** mit **sinnstiftendem Kontext**; bewusste **Lernzielbildung,** z. B. über **Kernfragen**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren** von Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten

**Begriff** | **Zusammenhang** | **Verfahren**

Stofferarbeitung

Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen** schaffen und **Aneignungshandlungen etappenweise verinnerlichen**

Festigung

vielfältiges **Üben** und komplexes **Anwenden**

Kontrolle und Bewertung

**Abgleich** zwischen Handlungsverlauf, Handlungsergebnis und Lernziel, z. B. über Betrachtung der **Kernidee in der Rückschauperspektive**

(Bruder, 1991)

# Zusammenhang finden

- induktiv über das Entdecken von Merkmalen in gegebenen Situationen
- aus dem Widerspruch zu einer angenommenen Hypothese
- deduktiv aus bisherigen Sachverhalten

(Vollrath & Roth, 2012, S. 247 f.)

**Innenwinkelsatz bei Dreiecken**

Winkel in Dreiecken messen, Summen bilden, Ergebnisse vergleichen

**Umkehrung des Satz des Thales**

rechte Winkel erzeugen, Punkte »stempeln«, Lage beobachten

**Nebenwinkelsatz**

Annahme aufgrund von Erkundungen: »Nebenwinkel sind nie gleich groß«

**Kosinussatz**

Zerlegung eines allgemeinen Dreiecks in rechtwinkl. Dreiecke, Anwendung des Satzes des Pythagoras

**p-q-Formel**

Herleitung über quadratische Ergänzung

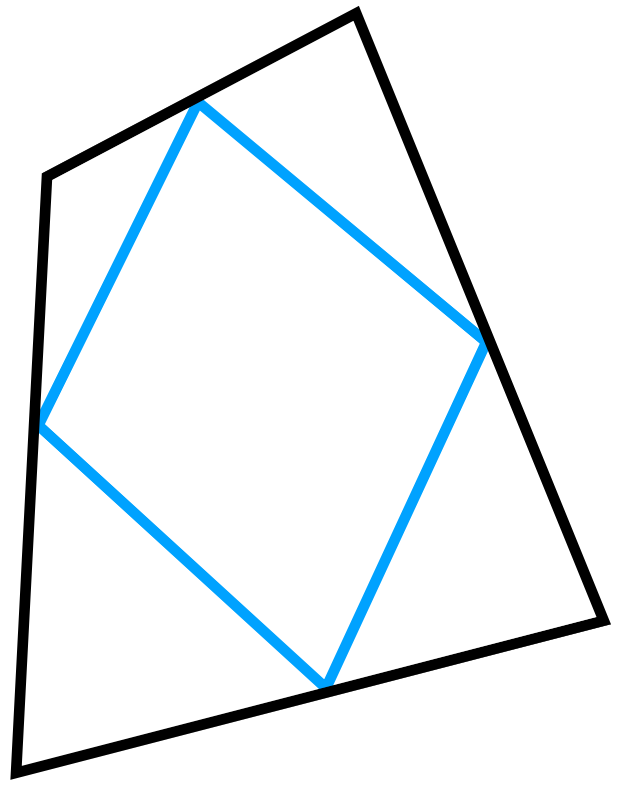
# Begründung finden

- über heuristische Strategien (z. B. Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten, Analogieschlüsse)
- heuristische Hilfsmittel (z. B. informative Figuren; Einzeichnen von Hilfslinien)
- Nutzung von Zusammenstellungen wichtiger Sachverhalte und Definitionen

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

## Das »Mittenviereck«

Das »Mittenviereck«, das entsteht, wenn man die Mittelpunkte aller Seiten eines Vierecks miteinander verbindet. Um welche Vierecksart handelt es sich beim Mittenviereck?

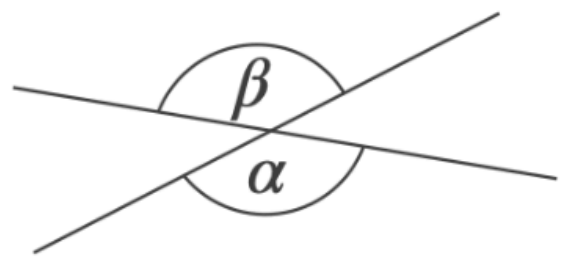
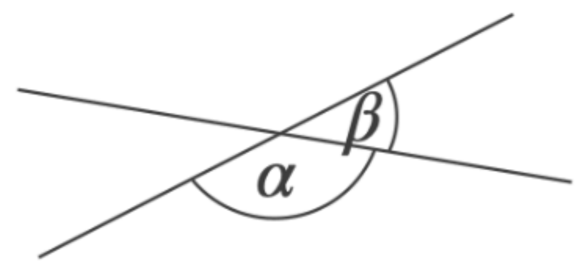
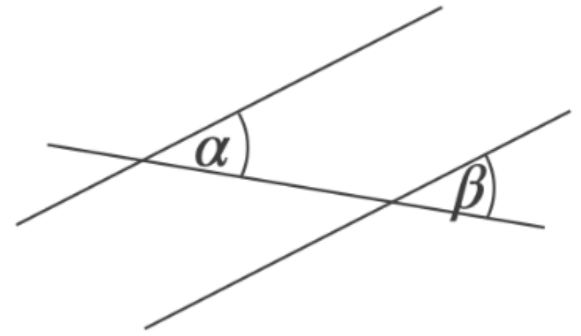
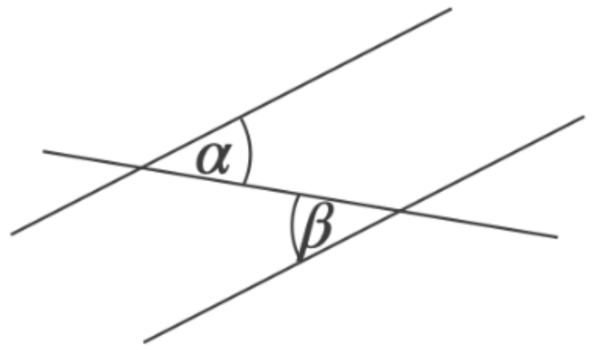


| Vierecksart | definierende Eigenschaft |
|---|---|
| **Quadrat** | alle Seiten gleich lang, vier rechte Winkel |
| **Rechteck** | gegenüberliegende Seiten gleich lang, vier rechte Winkel |
| **Parallelo-gramm** | gegenüberliegende Seiten parallel zueinander |
| **Raute** | alle Seiten gleich lang |

## Erkennen der inneren Struktur d. Sachverhalts

(Prüfen der Voraussetzungen, Angeben von Beispielen, Herausarbeiten von Voraussetzung und Behauptung)

**strukturierter Wissensspeicher:**
Tabelle, bestehend aus Bezeichnung, Voraussetzung, Behauptung und Visualisierung des Sachverhalts

| Name des Satzes | Voraussetzung | Skizze | Behauptung |
|---|---|---|---|
| Scheitelwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind ein Scheitelwinkelpaar. |  | $\alpha = \beta$ |
| Nebenwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind ein Nebenwinkelpaar. |  | $\alpha + \beta = 180^\circ$ |
| Stufenwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. |  | $\alpha = \beta$ |
| Wechselwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. |  | $\alpha = \beta$ |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

## Erkennen der inneren Struktur d. Sachverhalts

(Prüfen der Voraussetzungen, Angeben von Beispielen, Herausarbeiten von Voraussetzung und Behauptung)

**strukturierter Wissensspeicher:**
Tabelle, bestehend aus Bezeichnung, Voraussetzung, Behauptung und Visualisierung des Sachverhalts

**strukturbetonende Realisierungsmöglichkeit:**
Darstellung des Sachverhalts als Ausfüllhilfe mithilfe von Platzhaltern (v. a. bei algebraischen Zusammenhängen)

**1** Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

$\left(\boxed{-\frac{3}{4}l}\right)\cdot\left(\boxed{4l}-\boxed{12}\right)$

$$\square\cdot(\square-\square)=\square\cdot\square-\square\cdot\square$$

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

(Adam & Kleine, 2016, S. 51)

## Beweisfindung

(v. a. bei direkten Beweisen)

**Handlungsvorschrift:**

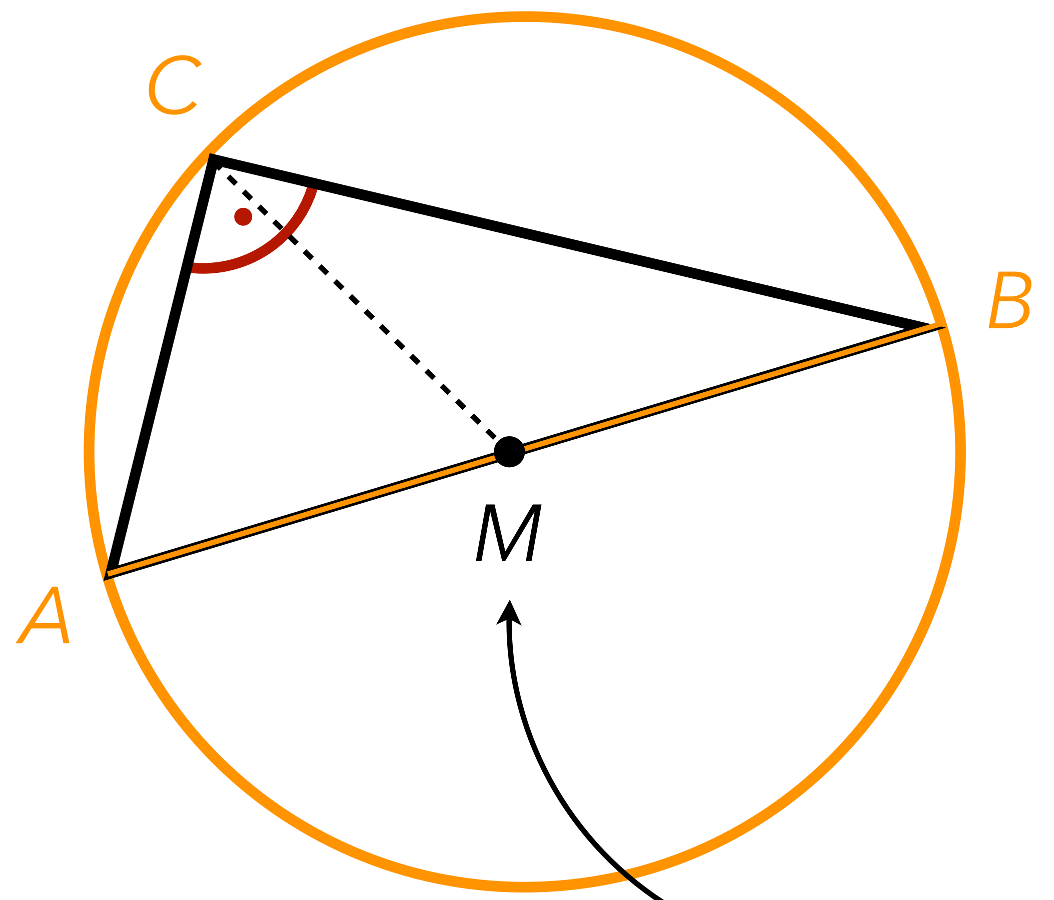
1. Formulieren des Satzes als **Wenn-dann-Aussage**
2. Feststellen von Voraussetzung und Behauptung
3. Erstellen einer **Überlegungsfigur**, Bezeichnung wichtiger Teile sowie der Voraussetzung und Behauptung
4. **Überlegung, woraus die Behauptung folgen** kann. Dabei Verwendung der Überlegungsfigur sowie Orientierung an
   - Definitionen vorkommender Begriffe
   - Sätzen mit gleicher Behauptung
   - Sätzen mit ähnlicher Behauptung
5. Abwägung, welcher Satz bzw. welche Definition geeignet ist
6. **Nachweis der Behauptung** aus den bei 5. gewählten Beweismitteln

(Steinhöfel et al., 1988, S. 72)

## Satz des Thales

**Wenn** C auf einem Kreis mit Durchmesser *AB* liegt, **dann** gilt für das Dreieck *ABC*: $\gamma = 90°$.

*andere Sätze mit Aussagen über Winkel in Dreiecken?*

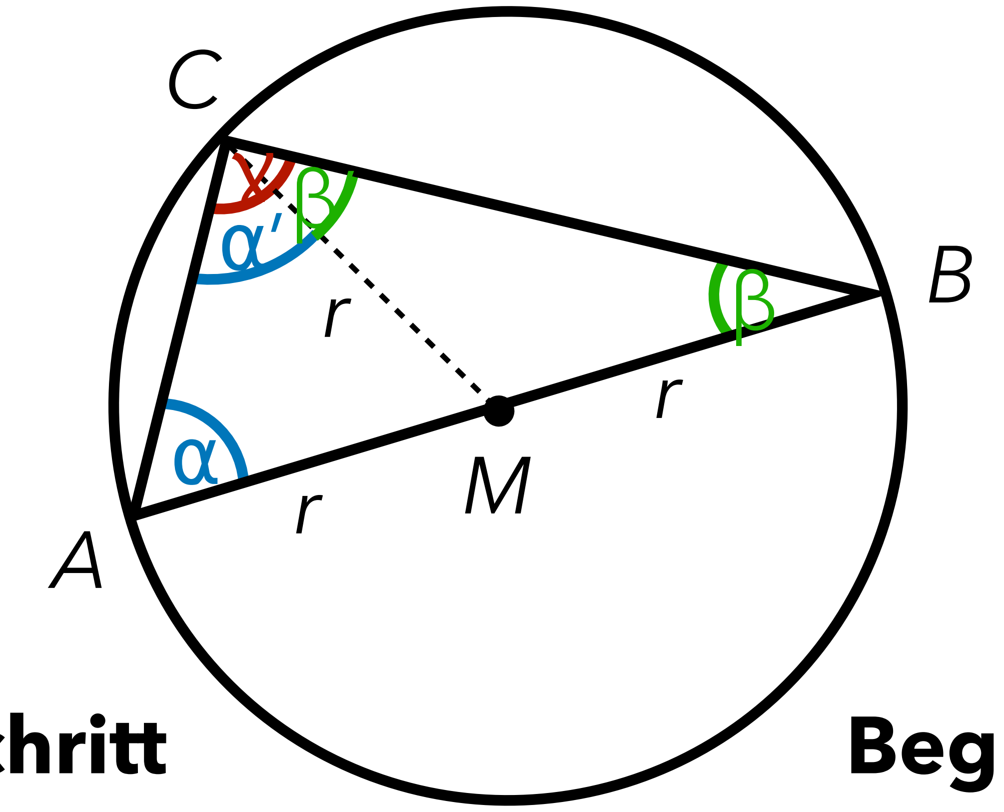



*M muss in irgendeiner Form relevant für den Beweis sein!*

## Beweisdarstellung

**Beweisschema:**

Tabelle, bestehend aus Beweisschritt und Begründung




| Beweisschritt | Begründung |
|---|---|
| (1) $AM = MB = MC$, $\gamma = \alpha' + \beta'$ | $AB$ Durchmesser, $C$ auf Kreis, Zerlegung von $\Delta ABC$ mit Radius |
| (2) $\alpha = \alpha'$ | $\Delta AMC$ gleichschenklig nach (1) |
| (3) $\beta = \beta'$ | $\Delta BMC$ gleichschenklig nach (1) |
| (4) $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180°$ | Innenwinkelsumme in $\Delta ABC$ und $\gamma = \alpha' + \beta'$ nach (1) |
| (5) $2\alpha' + 2\beta' = 180°$ | (4) mit (2) und (3) |
| (6) $\alpha' + \beta' = 90°$ | Umformung von (5) |
| (7) $\gamma = 90°$ | (1) und (6) |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 73)

| | |
|---|---|
| **Verwendung von Spezial- und Extremfällen** | • Einschränkung einer oder mehrerer Voraussetzungen<br>• Fallunterscheidungen |
| **Umformulieren** | • verschiedene logisch gleichwertige Formulierungen |
| **Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen** | • Voraussetzungen und Behauptungen nicht an feste Symbole binden |
| **Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen** | • Sätze mit gleicher Behauptung<br>• Sätze mit ähnlicher Behauptung |
| **Umkehrungen bilden** | • Voraussetzungen und Behauptungen vertauschen |
| **Bedingungen variieren** | • Weglassen bzw. Hinzufügen von Voraussetzungen |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

Lernende haben einen mathematischen *Zusammenhang verstanden*, wenn sie

- den Zusammenhang angemessen formulieren können
- Beispiele für den Zusammenhang angeben können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen der Zusammenhang gilt
- den Zusammenhang begründen können
- Konsequenzen des Zusammenhangs kennen
- Anwendungen des Zusammenhangs kennen

(nach Vollrath & Roth, 2012, S. 49)

Verfahren als Routine, eine Klasse von Problemen zu lösen ~~Kreativität~~ Disziplin

(Vollrath & Roth, 2012, 262 f.)

**Ansatz zum Gewinnen eines Verfahrens:**

Reflektierende Betrachtung der Lösung spezifischer Probleme derselben Problemklasse

- Was haben all die betrachteten Probleme gemeinsam?
- Welche Schritte haben wir jeweils durchgeführt, um das Problem zu lösen?
- Wozu haben wir die Schritte durchgeführt?
- Warum war es möglich, die Schritte durchzuführen?

## Intervallschachtelung zum näherungsweisen Bestimmen einer Wurzel

- Was haben all die betrachteten Probleme gemeinsam?
- Welche Schritte haben wir jeweils durchgeführt, um das Problem zu lösen?
- Wozu haben wir die Schritte durchgeführt?
- Warum war es möglich, die Schritte durchzuführen?

$$\sqrt{5}$$

$$2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$2{,}1^2 = 4{,}41 \qquad 2{,}2^2 = 4{,}84 \qquad 2{,}3^2 = 5{,}29$$

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

Gesucht ist eine Näherung für $\sqrt{n}$.

1. Finde natürliche Zahlen $a_1, b_1$ mit $a_1^2 < n < b_1^2$.
2. Finde $a_2, b_2$ mit einer Dezimalstelle, sodass $a_1 < a_2, b_2 < b_1$ und $a_2^2 < n < b_2^2$.
3. Wiederhole den letzten Schritt jeweils mit einer weiteren Dezimalstelle bis zur gewünschten Anzahl $k$ an Dezimalstellen. Du erhältst $a_k^2 < n < b_k^2$.
4. $a_k$ bzw. $b_k$ sind Näherungen für $\sqrt{n}$.

**Intervallschachtelung zum näherungsweisen Bestimmen einer Wurzel**

$$\sqrt{5}$$

$$2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$2{,}1^2 = 4{,}41 \qquad 2{,}2^2 = 4{,}84 \qquad 2{,}3^2 = 5{,}29$$

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

| | **Verfahren anwenden** |
|---|---|
| **Orientierungshilfe** | schriftliche Fixierung des Verfahrensablaufs – als Wortvorschrift, als Flussdiagramm bzw. als Graph o. Ä. |
| **materielle/materialisierte Handlung** | Verfahrensablauf liegt in schriftlicher Form vor. |
| **sprachliche Handlung** | Verfahrensablauf liegt nicht mehr schriftlich vor. Die einzelnen Schritte werden von den Schülerinnen und Schülern während der Ausführung kommentiert. |
| **geistige Handlung** | Die Schülerinnen und Schüler führen das Verfahren selbstständig und ohne schriftlich vorliegenden Verfahrensablauf aus. |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 118)

| | |
|---|---|
| **Verwendung von Spezial- und Extremfällen** | • Spezialisierung von Operanden (Fallunterscheidungen) |
| **Umformulieren** | • evtl. unterschiedliche Reihenfolge der Operationen |
| **Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen** | • unterschiedliche Formalisierungen (Blockschema, Wortvorschrift, Graph, …) |
| **Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen** | • Unteralgorithmen<br>• Oberalgorithmen |
| **Umkehrungen bilden** | • Umkehroperationen bilden |
| **Bedingungen variieren** | • unterschiedliche Variablengrundbereiche |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

Lernende haben einen mathematischen *Verfahren verstanden*, wenn sie

- wissen, was man damit erreicht
- wissen, wie es geht
- es auf Beispiele anwenden können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen es funktioniert
- wissen, warum es funktioniert

(nach Vollrath & Roth, 2012, S. 49 f.)

# Zusammenfassung

## Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren

| | Begriff | Zusammenhang | Verfahren |
|---|---|---|---|
| **1 Inhalt erarbeiten** | Begriff bilden | Zusammenhang finden<br>Begründung finden<br>Begründung darstellen | Verfahren gewinnen |
| **2 Orientierungshilfen und Aneignungshandlungen** | | $\square\cdot(\square-\square)=\square\cdot\square-\square\cdot\square$ | |
| **3 vielfältiges Üben und komplexes Anwenden** | Verwendung von Spezial- und Extremfällen, Umformulieren, Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen, Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zsh. erkennen lassen, Umkehrungen bilden, Bedingungen variieren | | |

| Festigung | Begriff | Zusammenhang | Verfahren |
|---|---|---|---|
| **Verwendung von Spezial- und Extremfällen** | • Unterbegriffe<br>• Grenzfall | • Einschränkung einer oder mehrerer Voraussetzungen<br>• Fallunterscheidungen | • Spezialisierung von Operanden (Fallunterscheidungen) |
| **Umformulieren** | • verschiedene Definitionsarten<br>• Def. in Merkmalsystem verwandeln | • verschiedene logisch gleichwertige Formulierungen | • evtl. unterschiedliche Reihenfolge der Operationen |
| **Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen** | • Merkmale nicht an feste Variablensymbole binden | • Voraussetzungen und Behauptungen nicht an feste Symbole binden | • unterschiedliche Formalisierungen (Blockschema, Wortvorschrift, Graph, …) |
| **Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen** | • Oberbegriffe<br>• Einordnung in Begriffssystem | • Sätze mit gleicher Behauptung<br>• Sätze mit ähnlicher Behauptung | • Unteralgorithmen<br>• Oberalgorithmen |
| **Umkehrungen bilden** | | • Voraussetzungen und Behauptungen vertauschen | • Umkehroperationen bilden |
| **Bedingungen variieren** | • Merkmalsvariation durch Weglassen bzw. Hinzufügen von Merkmalen, Ändern der log. Verknüpfung | • Weglassen bzw. Hinzufügen von Voraussetzungen | • unterschiedliche Variablengrundbereiche |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

# Literatur


Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Potsdam*, *35*(2), 129–134.

Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 8, Berlin/Brandenburg* (1. Auflage). C.C.Buchner.

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4

Steinhöfel, W., Reichold, K., & Frenzel, L. (1988). *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht*. Ministerium für Volksbildung.