Universität Potsdam – Wintersemester 2025/26

Stoffdidaktik Mathematik

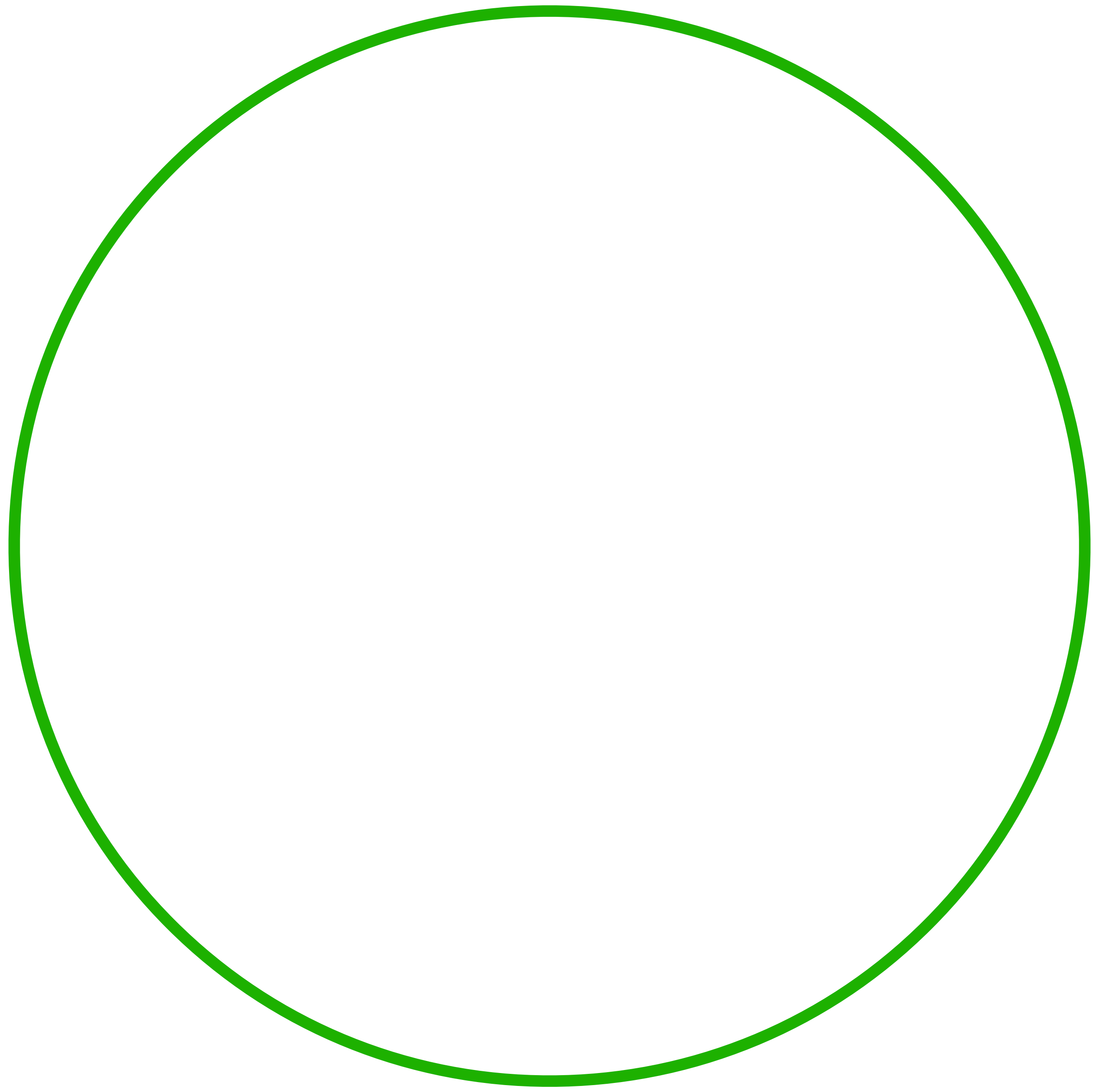
Kapitel 4 – Darstellungen und Arbeitsmittel

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 4 – Darstellungen und Arbeitsmittel

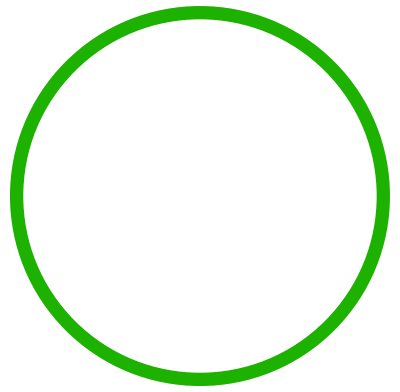
- Sie kennen Möglichkeiten, mathematisches Verständnis mithilfe von Darstellungen auszubilden.
- Sie können Arbeitsmittel über Anschaulichkeit, Abstraktheit und Operierbarkeit charakterisieren.
- Sie kennen ausgewählte Arbeitsmittel für den Mathematikunterricht.

Ist das ein Kreis?

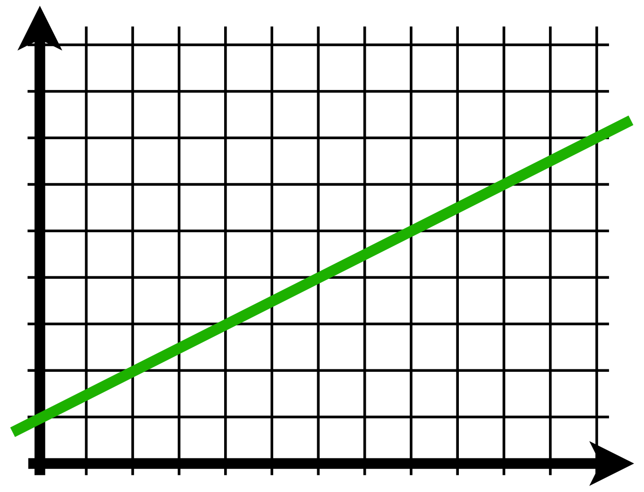


Nein, das ist die **Darstellung** eines Kreises!

(mehr dazu bei Salle et al., S. 431 – 435)



Darstellungen

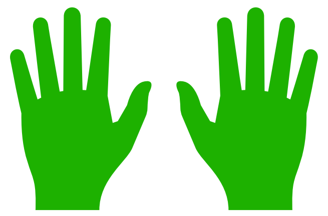


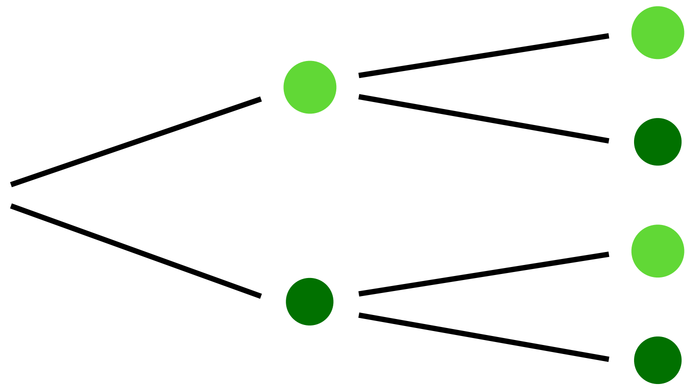
[Mathematische] **Darstellungen** sind […] alles **empirisch Wahrnehmbare**, das auf **mathematische Beziehungen, Objekte, Strukturen und Prozesse verweisen** kann.

Darunter fallen z. B. Wendeplättchen, Rechenrahmen, Zehnersystem-Material, Tangram, Flächen- und Kantenmodelle, Fotos (z. B. von Hängebrücken oder symmetrischen Anordnungen in der Umwelt), Filme bzw. bewegte Bilder im weiteren Sinne, Punktefelder, Diagramme, Tabellen, Zahlenstrahle, Koordinatensysteme, Graphen, Schrägbilder, Drei-Tafel-Projektionen, Skizzen, Gesten und Handlungen mit und an Objekten, Terme, Formeln und Variablen.

(Salle et al., 2013, S. 437)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$





Grundvorstellungen mit Darstellungen ausbilden

- Veränderungen beim Darstellungswechsel untersuchen
  - ***EIS-Prinzip / Prinzip der Darstellungsvernetzung***

- Operative Veränderungen von Darstellungen untersuchen
  - ***Operatives Prinzip***

- Reflexion und sprachliche Begleitung
  - *(Prinzip der etappenweisen Verinnerlichung)*

(Salle et al., 2013, S. 441 ff.)

Mathematisches Verständnis mit Darstellungen ausbilden

Was verändert sich?
Was bleibt gleich?

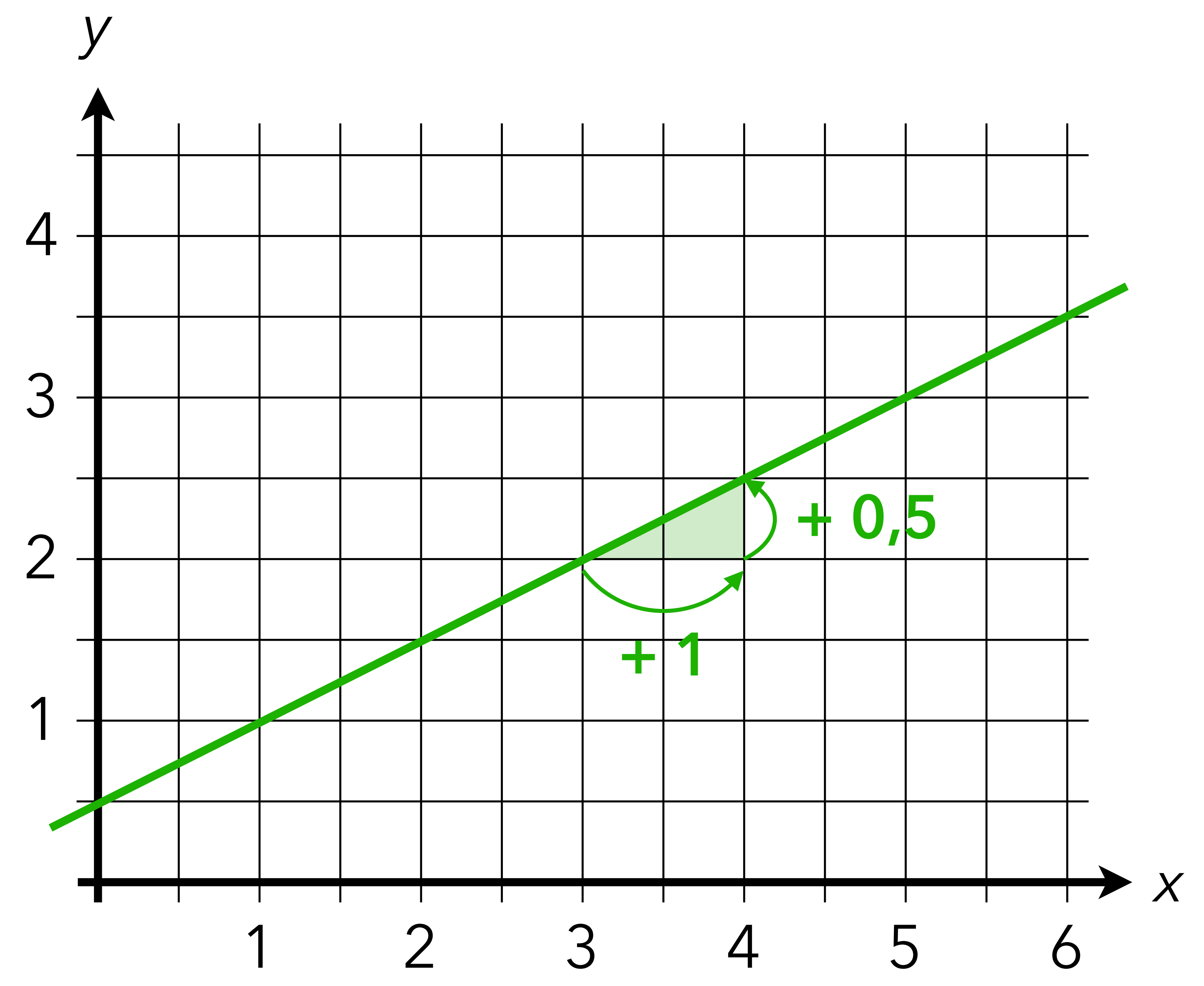
Veränderungen beim Darstellungswechsel untersuchen

Begriff
»Lineare Funktion«

x	y
0	0,5
1	1
2	1,5
3	2
4	2,5
5	3

+ 1 + 1 + 1 + 1 + 1

+ 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + 0,5



Mathematisches Verständnis mit Darstellungen ausbilden

Was passiert mit …, wenn …

Operative Veränderungen von Darstellungen untersuchen

Zusammenhang
»Distributivgesetz«

$$
\begin{array}{lll}
2 \cdot (3 + 7) = 20 & 3 \cdot (3 + 7) = \; ? & \cdots \\
2 \cdot (3 + 8) = \; ? & 3 \cdot (3 + 8) = \; ? & \\
2 \cdot (3 + 9) = \; ? & 3 \cdot (3 + 9) = \; ? & \\
\vdots & \vdots &
\end{array}
$$

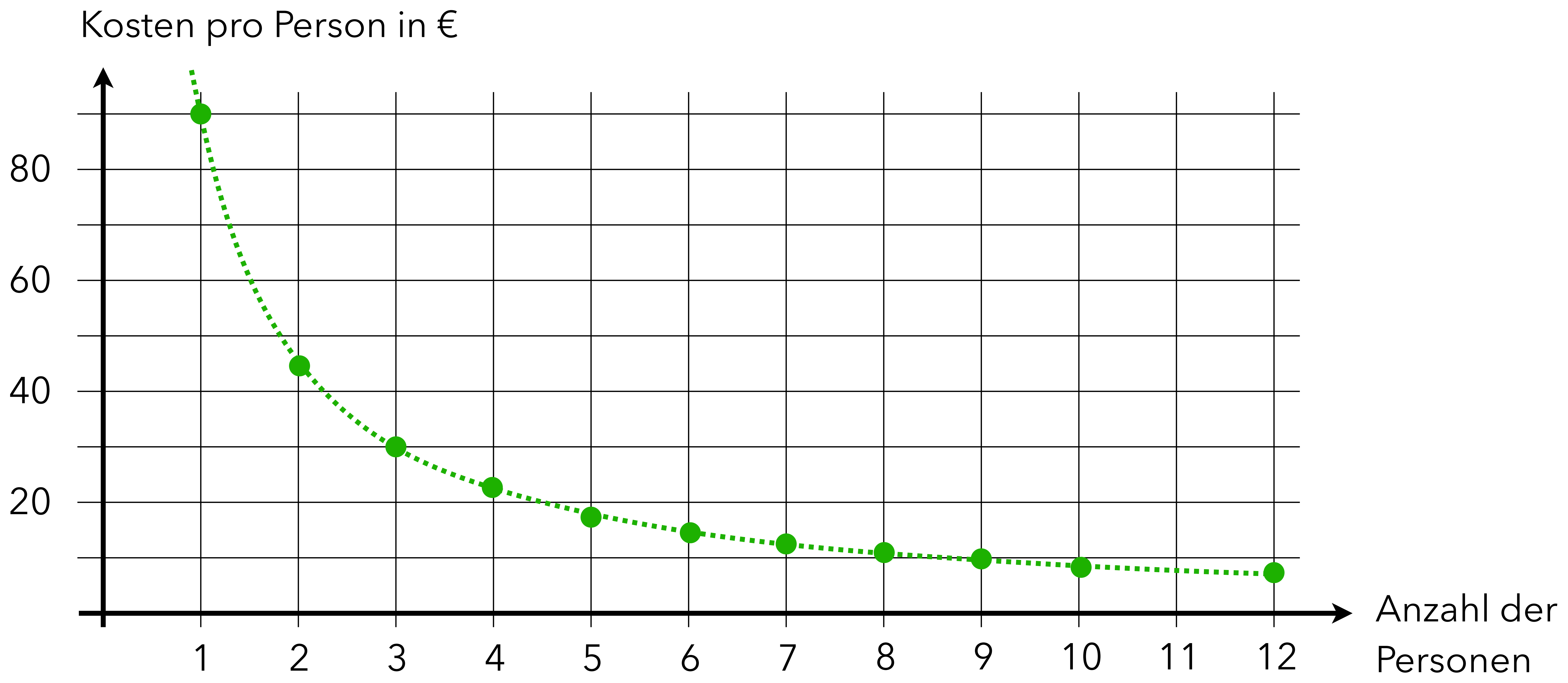
Mathematisches Verständnis mit Darstellungen ausbilden

Reflexion und sprachliche Begleitung

Wieso sieht die Darstellung so aus? Wieso verhält sie sich so?

Begriff »Definitionsbereich«

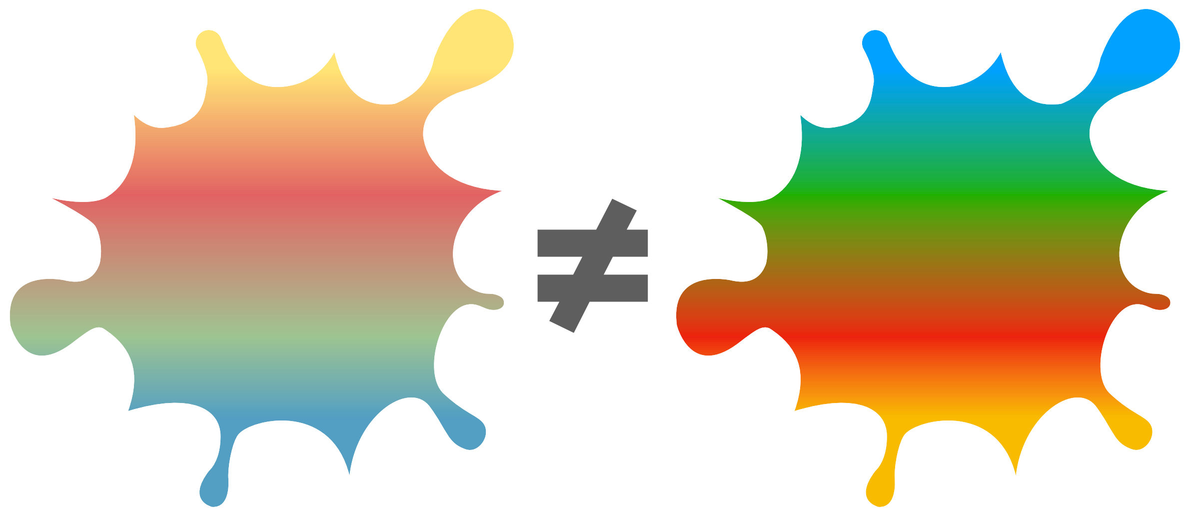
Die Kosten einer 90 € teuren Feier werden gleichmäßig auf die Anzahl der Personen aufgeteilt.



Mathematisches Verständnis mit Darstellungen ausbilden

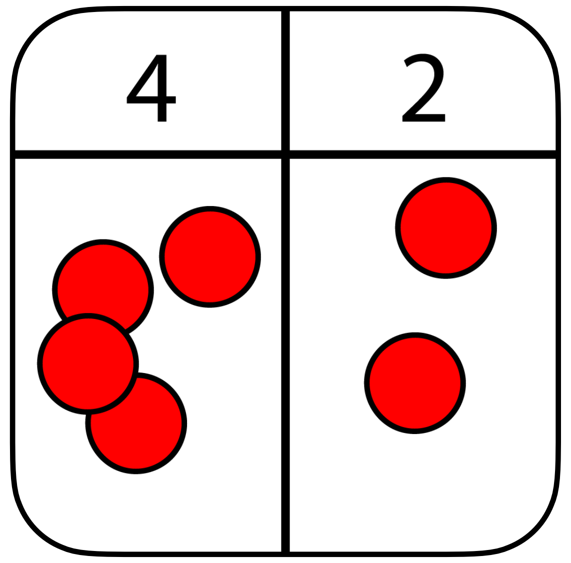
Reflexion und sprachliche Begleitung

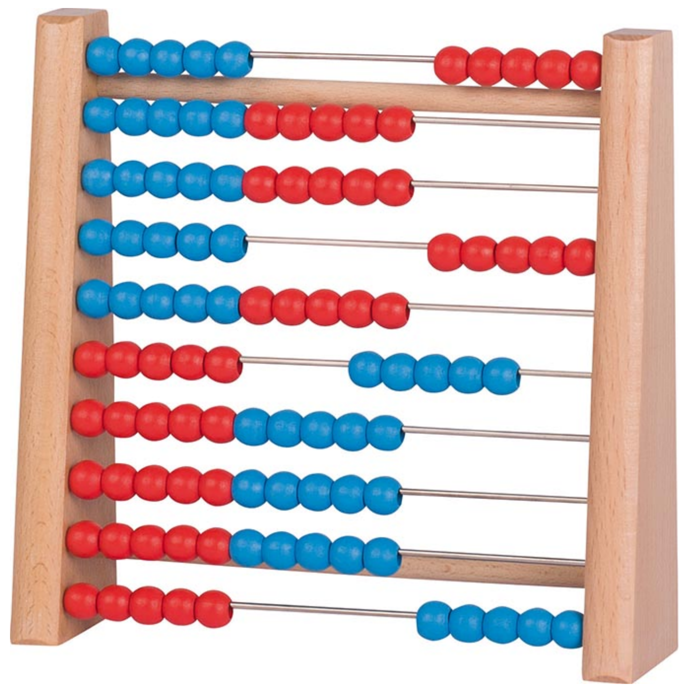
1	*Das Kind handelt am geeigneten Material.* Die mathematische Bedeutung der Handlung wird beschrieben. Zentral: Versprachlichen der Handlung und der mathematischen Symbole.
2	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung mit Sicht auf das Material.* Es handelt jedoch nicht mehr selbst, sondern diktiert einem Partner die Handlung und kontrolliert den Handlungsprozess durch Beobachtung.
3	*Das Kind beschreibt die Materialhandlung ohne Sicht auf das Material.* Für die Beschreibung der Handlung ist es darauf angewiesen, sich den Prozess am Material vorzustellen.
4	*Das Kind arbeitet auf symbolischer Ebene, übt und automatisiert.* Gegebenenfalls wird die entsprechende Handlung in der Vorstellung aktiviert.

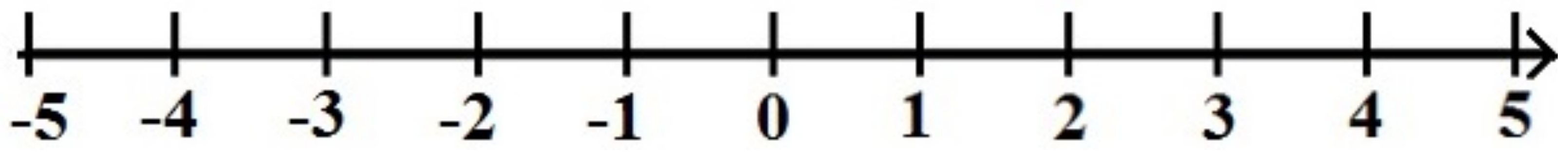


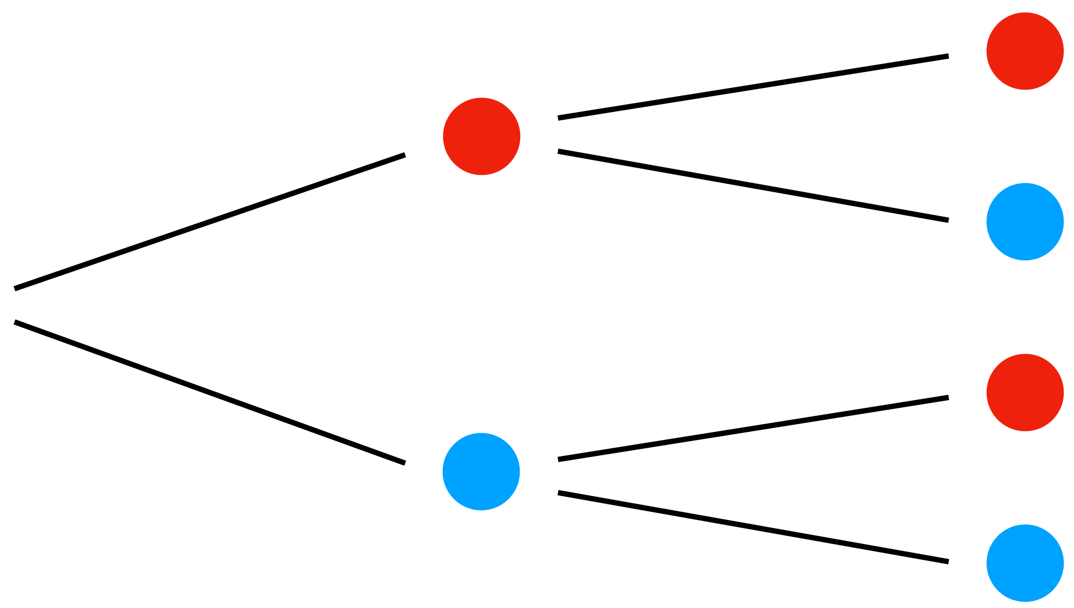
(Wartha & Schulz, 2011, S. 11)

Arbeitsmittel









abstrakt

enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen

anschaulich

macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich

operierbar

ermöglicht, Handlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind

Arbeitsmittel

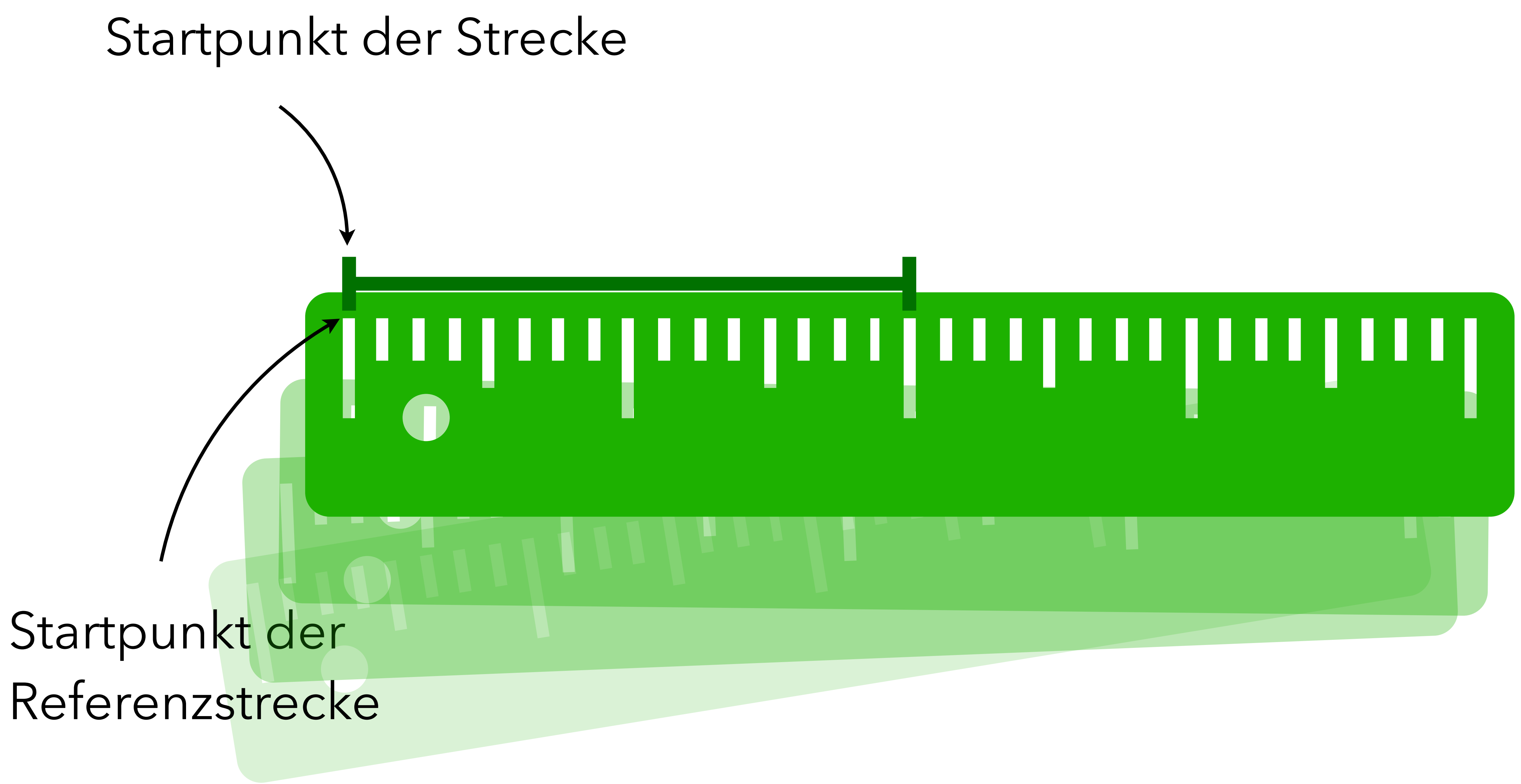
Ein **Arbeitsmittel** ist eine **materielle oder materialisierte** Darstellung eines Lerngegenstands, die es ermöglicht, mit dem Lerngegenstand zu **operieren**. Damit muss ein Arbeitsmittel folgende Bedingungen erfüllen:

- Es enthält die dem Wesen des Lerngegenstands entsprechenden Merkmale und Relationen **(Abstraktheit)**.
- Es macht die dem Lerngegenstand zugrundeliegende Struktur der Wahrnehmung und Vorstellung zugänglich **(Anschaulichkeit)**.
- Es ermöglicht, Lernhandlungen durchzuführen, die der Aneignung des Wesens des Lerngegenstands dienlich sind **(Operierbarkeit)**.

Arbeitsmittel

Beispiel: Längenmessung

Messen einer Stecke als Vergleichen zu einer Referenzstrecke



Operationen:

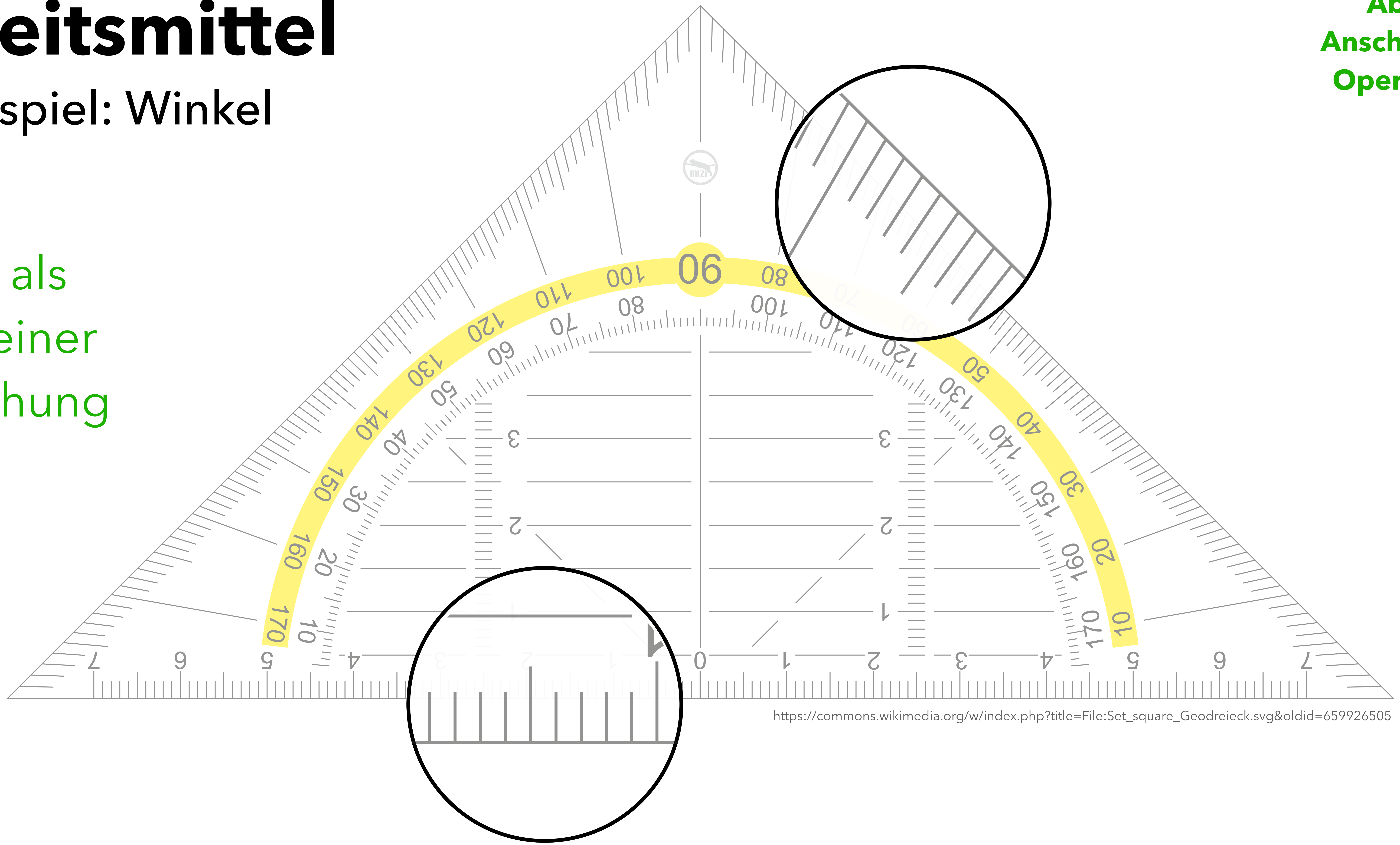
- Startpunkte aufeinanderlegen
- Lineal an Strecke ausrichten
- Zahl ablesen

Arbeitsmittel

Beispiel: Winkel

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Winkel als
Weite einer
Umdrehung



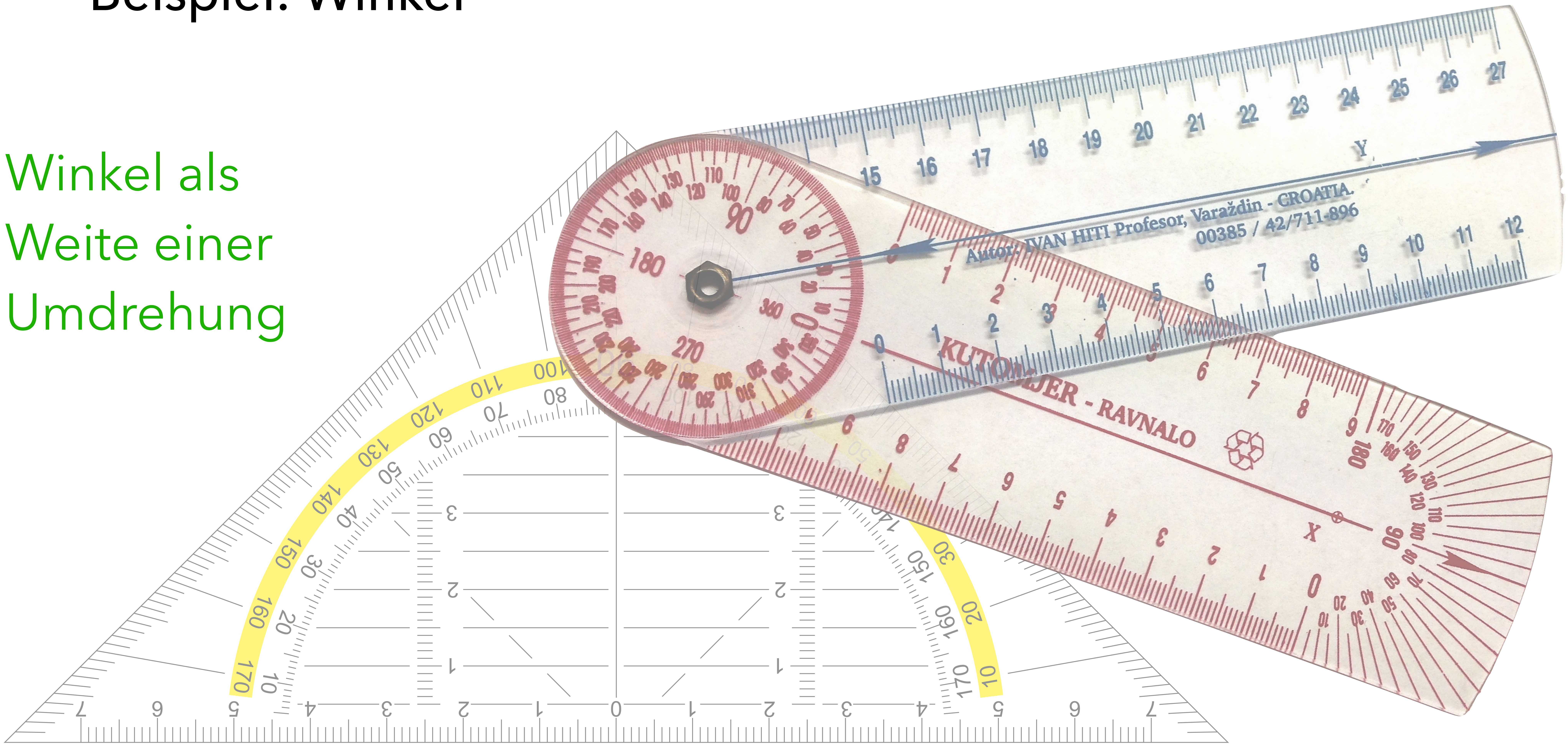
https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Set_square_Geodreieck.svg&oldid=659926505

Arbeitsmittel

Beispiel: Winkel

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Winkel als
Weite einer
Umdrehung



https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Set_square_Geodreieck.svg&oldid=659926505

Gleichungen

Objekt »Gleichung«

Lösen von Gleichungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Operationale Grundvorstellung

Gleichung als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung

Gleichheitszeichen als »ergibt«-Zeichen

$2 + 3 = 5$ $\qquad V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Relationale Grundvorstellung

Gleichung als Anlass, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten denselben Wert besitzen

Gleichheitszeichen als Relationszeichen, Variable als Unbekannte

$2x + 1 = 7$

Funktionale Grundvorstellung

Gl. als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Funktionstermen

Gleichheitszeichen als Relationszeichen, Variablen als Veränderliche

$x + 1 = -3x$

Objekt-Grundvorstellung

Gleichung als ein Objekt, das charakteristische Eigenschaften hat

$x^2 + y^2 = r^2$

(Weigand et al., 2022, S. 257 f.)

Gleichungen

Objekt »Gleichung«

Lösen von Gleichungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Operationale Grundvorstellung
Gleichung als Ausdruck einer Berechnung oder Umformung

$2 + 3 = 5$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

»Rückwärtsrechnen«

Relationale Grundvorstellung
Gleichung als Anlass, Zahlen oder Terme zu ermitteln, für die beide Seiten denselben Wert besitzen

$2x + 1 = 7$

Äquivalenzumformungen

Funktionale Grundvorstellung
Gl. als Ausdruck eines Vergleichs zwischen zwei Funktionstermen

$x + 1 = -3x$

Schnittpunkt suchen

Objekt-Grundvorstellung
Gleichung als ein Objekt, das charakteristische Eigenschaften hat

$x^2 + y^2 = r^2$

Koordinaten prüfen

(Weigand et al., 2022, S. 257 f.)

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

Was ist eine Gleichung?

$$2+3=8 \qquad 2x=14$$

Aussage **Aussageform**

$$T_1(x) = T_2(x)$$

Was ist die Lösung einer Gleichung?

$$\frac{7}{x} = 2$$

Grundmenge $\mathbb{G}$	$\mathbb{Z}$
Definitionsmenge $\mathbb{D}$	$\mathbb{Z}\backslash\{0\}$
Lösungsmenge $\mathbb{L}$	$\{\ \}$

Ein Wert $x_0 \in \mathbb{D}$ heißt Lösung einer Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$, wenn $T_1(x_0) = T_2(x_0)$ eine wahre Aussage ist. Die Menge aller Lösungen wird Lösungsmenge genannt. Sie ist eine Teilmenge der Definitionsmenge.

Was ist eine Äquivalenzumformung?

Jede Anwendung einer **injektiven Funktion** auf **beide Seiten einer Gleichung** verändert nicht die Lösungsmenge der Gleichung und wir daher als **Äquivalenzumformung** bezeichnet.

Lösungsmengenäquivalenz: Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn ihre Lösungsmengen gleich sind.

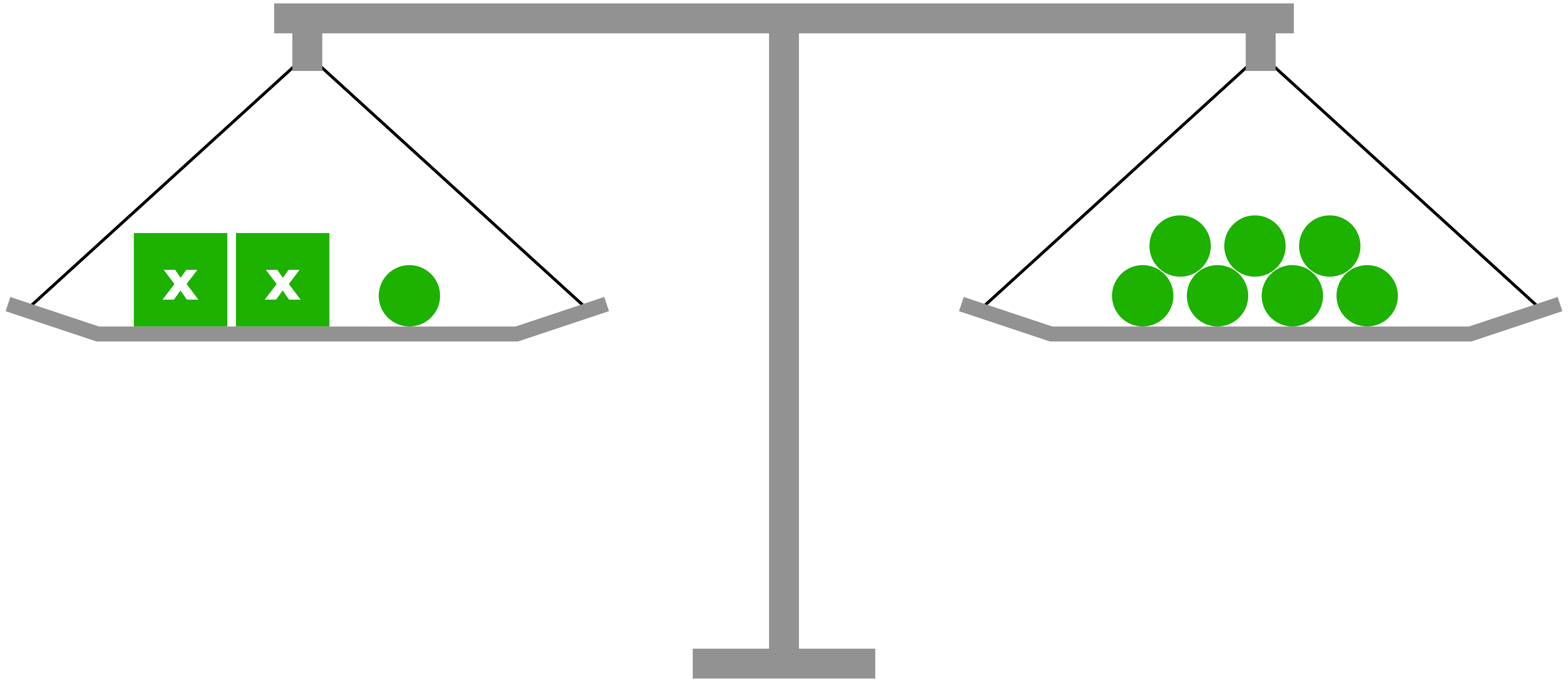
Umformungsäquivalenz: Zwei Gleichungen heißen äquivalent, wenn sie durch Äquivalenzumformungen ineinander übergehen.

(Weigand et al., 2022, S. 242 ff.)

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$
\begin{aligned}
2x + 1 &= 7 \qquad &&| -1 \\
2x &= 6 &&| :2 \\
x &= 3
\end{aligned}
$$

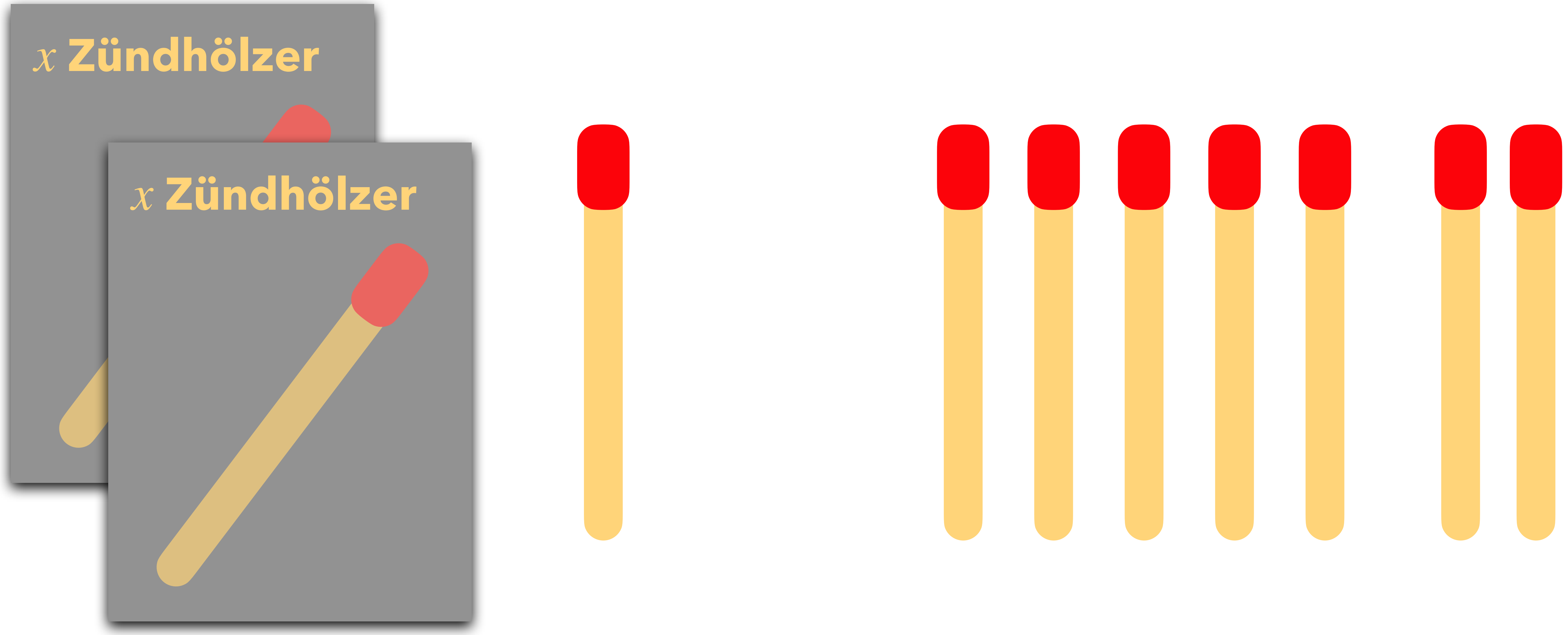


- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 7 \qquad &&| -1 \\ 2x &= 6 &&| : 2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

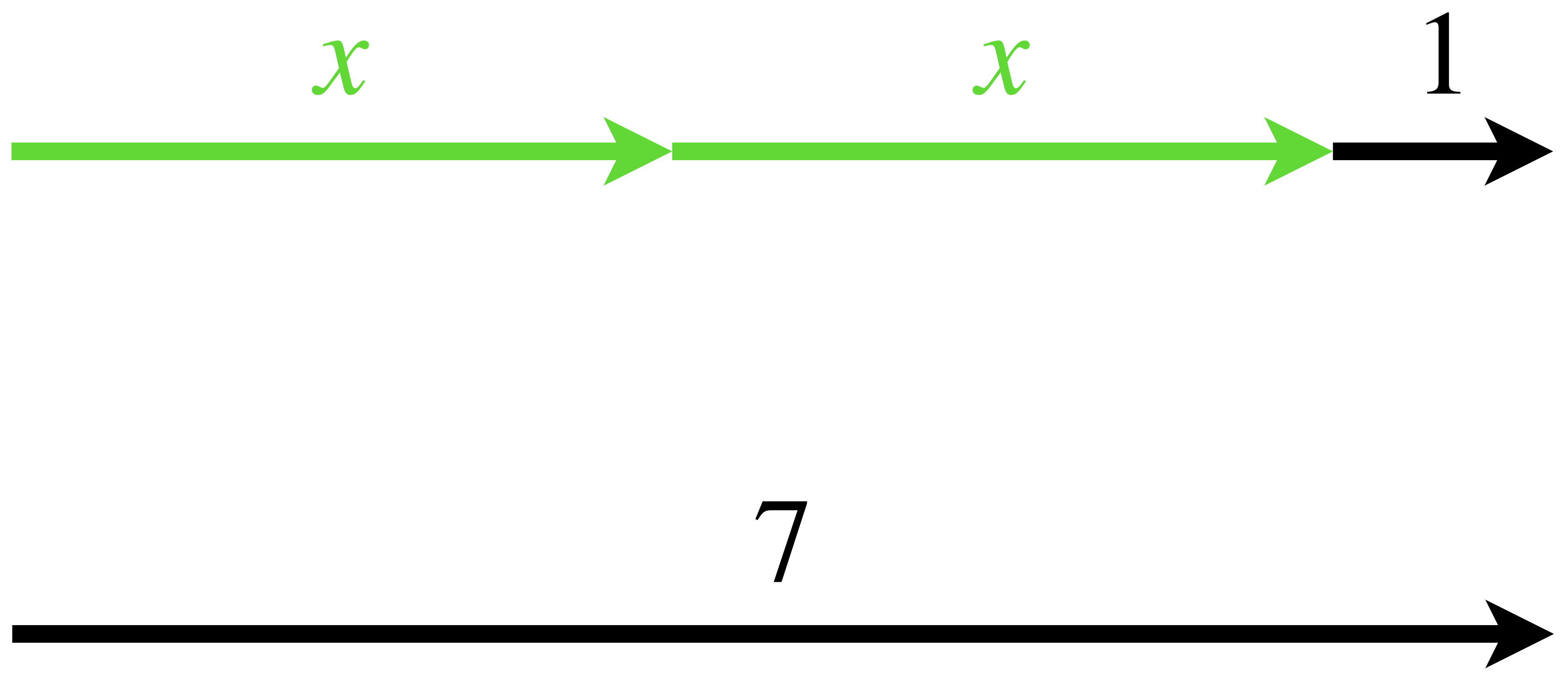


- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 7 && \mid -1 \\ 2x &= 6 && \mid :2 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

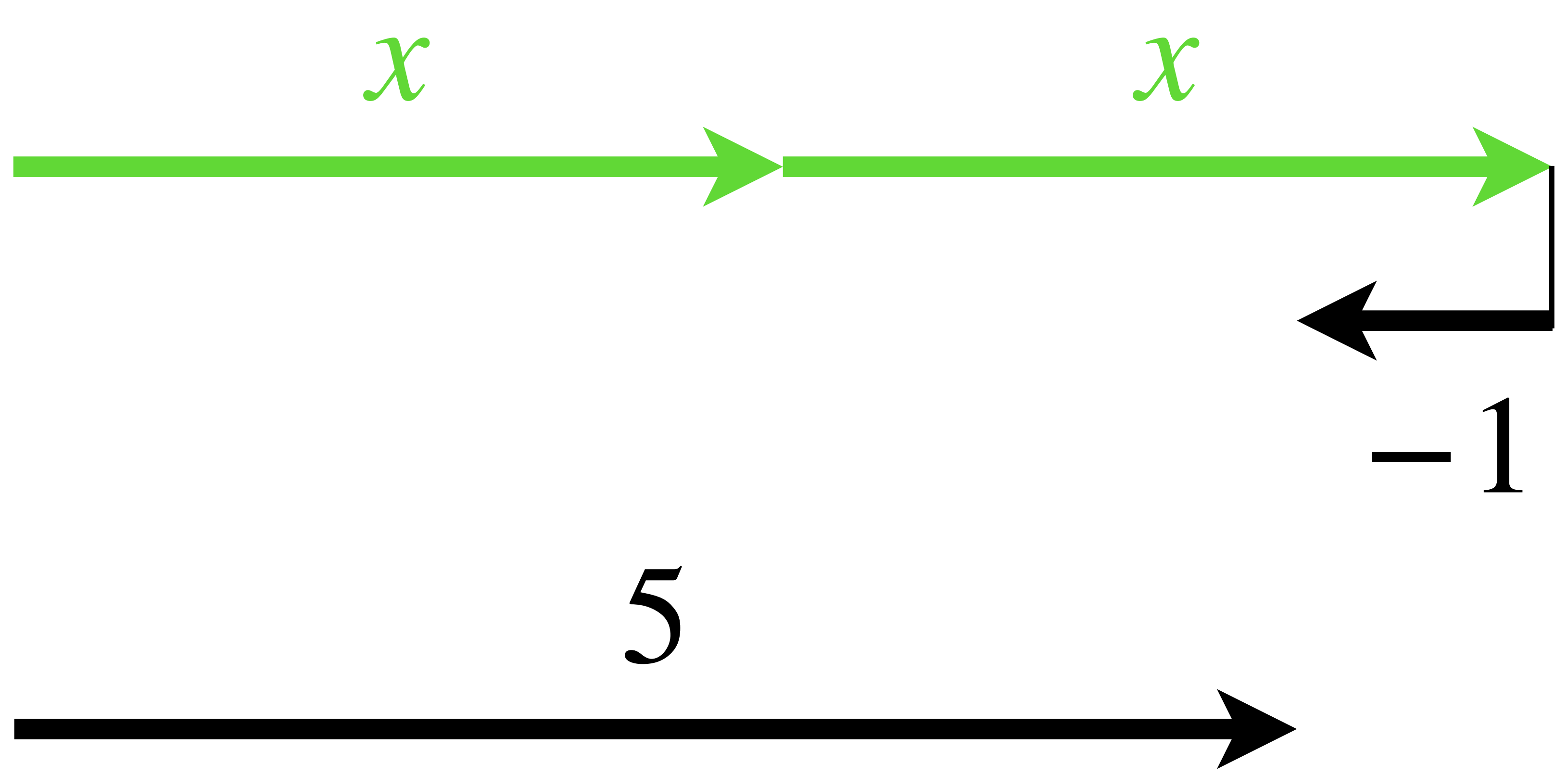


- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

Äquivalenzumformungen

Abstraktheit
Anschaulichkeit
Operierbarkeit

$$2x - 1 = 5$$



- Eine Gleichung $T_1(x) = T_2(x)$ ist eine **Aussageform**.
- Die **Lösung** einer Gleichung macht diese zur wahren Aussage.
- **Äquivalenzumformungen** verändern nicht die Lösungsmenge der Gleichung.

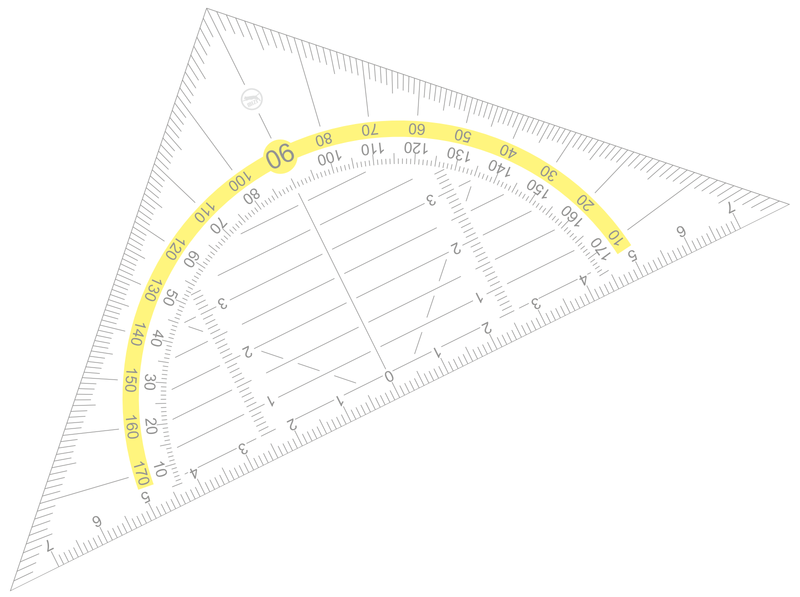
Zusammenfassung Kapitel 4 – Darstellungen und Arbeitsmittel

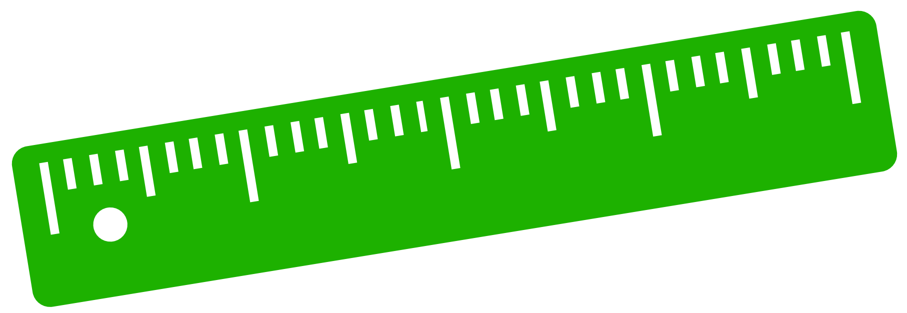
Math. Verständnis mit Darstellungen ausbilden

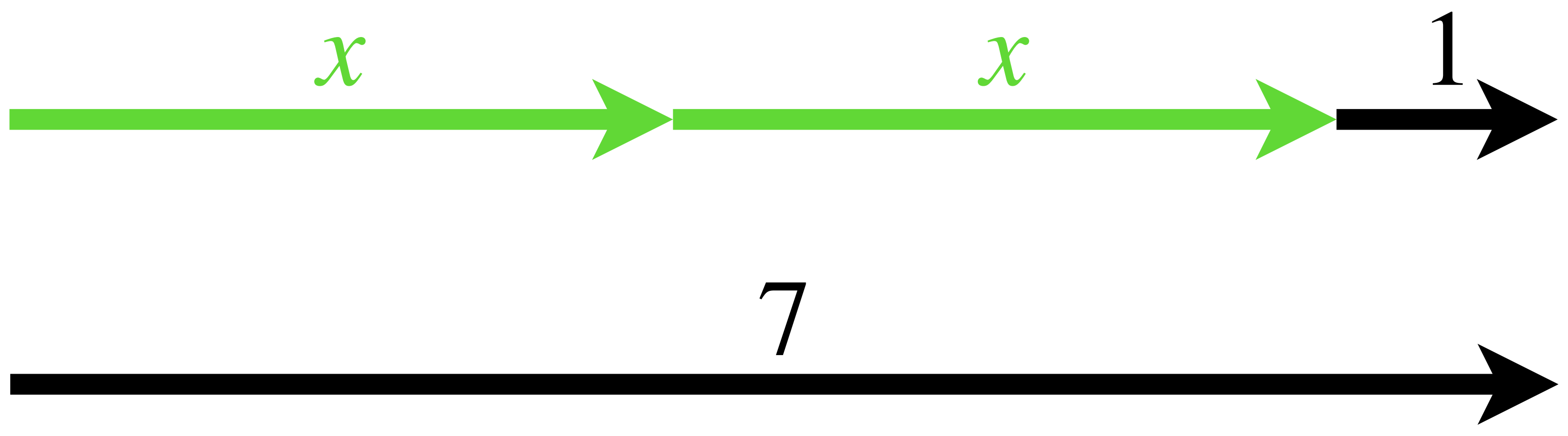
- Veränderungen beim Darstellungswechsel untersuchen
  EIS-Prinzip / Prinzip der Darstellungsvernetzung
- Operative Veränderungen von Darstellungen untersuchen
  Operatives Prinzip
- Reflexion und sprachliche Begleitung

Arbeitsmittel

abstrakt
anschaulich
operierbar







Literatur

Dohrmann, C., & Kuzle, A. (2015). Winkel in der Sekundarstufe I – Schülervorstellungen erforschen. In M. Ludwig, A. Filler, & A. Lambert (Hrsg.), *Geometrie zwischen Grundbegriffen und Grundvorstellungen* (S. 29–42). https://doi.org/10.1007/978-3-658-06835-6

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

Salle, A., Schmidt-Thieme, B., Schulz, A., & Söbbeke, E. (2023). Darstellen und Darstellungen verwenden. In R. Bruder, A. Büchter, H. Gasteiger, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 429–461). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-66604-3_14

Wartha, S., & Schulz, A. (2011). *Aufbau von Grundvorstellungen (nicht nur) bei besonderen Schwierigkeiten im Rechnen*. IPN Kiel. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_WarthaSchulz.pdf

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1