Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 12 – Didaktik der Analysis

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 12 – Didaktik der Analysis

- Sie sind sich bewusst, dass Analysis in Universität und Schule unterschiedlich strukturiert sind und dies in der Schulrealität in einen propädeutischen Grenzwertbegriff mündet.
- Sie kennen Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff.
- Sie haben einen Einblick in das Unterrichten mit CAS als Werkzeug für die Schülerinnen und Schüler.

Analysis

Aufbau in Uni und Schule

Uni	Folgen	Konvergenz von Folgen	Vollständigkeit von $\mathbb{R}$	Reihen	Stetigkeit	Grenzwerte von Funktionen	Differenzierbarkeit	…
Schule	–	–	Intervallschachtelung	–	–	Grenzverhalten im Unendlichen	Ableitung	…

Beschreiben und Reflektieren eines Verfahrens zur Einschachtelung von Quadratwurzeln oder Pi (auch mithilfe von digitalen Mathematikwerkzeugen)

Grenzwerte auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitungen nutzen,

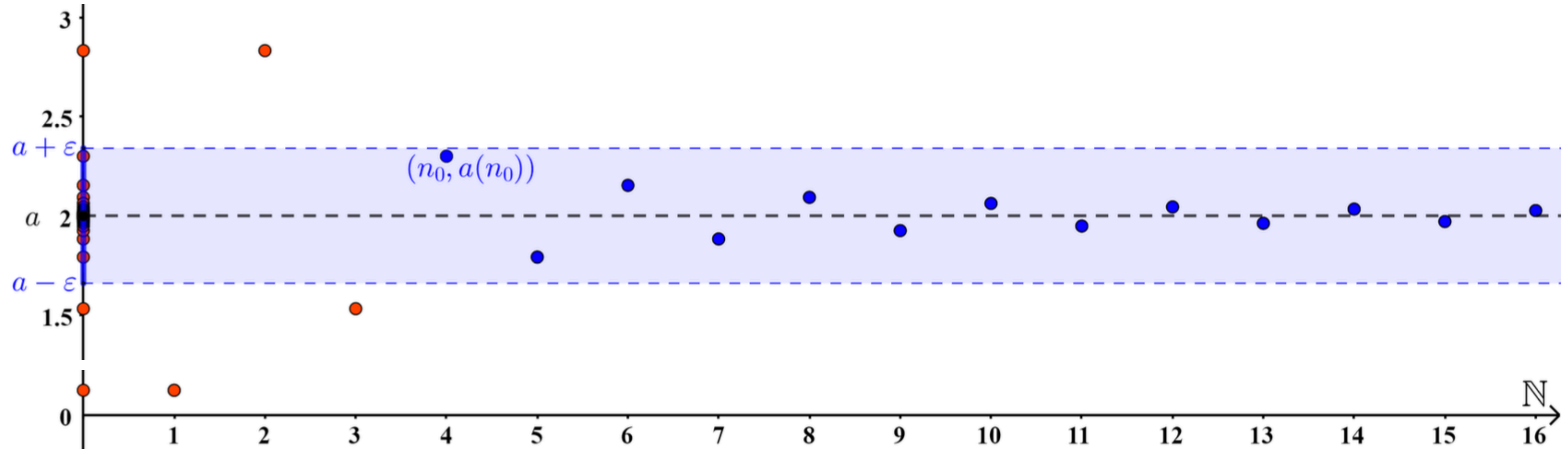
– Grenzwertverhalten von Funktionsgraphen ($x \to \pm\infty; x \to x_0$)
– Schreibweise „lim“ ohne formale Definition
– Ableitung einer Funktion mittels Differentialquotienten

(Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, 2022, S. 25; 2023, S. 42)

Konvergenz und Grenzwert

Eine (rationale) Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{Q}$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 > 0 : n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$



(Enders, S. 36)

Bis n_0 können die Folgeglieder machen, was sie wollen.
Ab n_0 befinden sich die Folgeglieder im ε-Schlauch.
Das alles funktioniert für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$.

»Fast alle« Folgenglieder kommen dem Grenzwert beliebig nah.

unvollständige/fehlerhafte Vorstellungen

- Immer »dichter« werdende Folgen konvergieren.
- Reihenfolge der Folgenglieder ist relevant.
- Folgenglieder kommen dem Grenzwert mit jedem Schritt näher.
- Der Grenzwert wird nie erreicht.

$x_1 = 1 \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{5}{x_n}\right)$

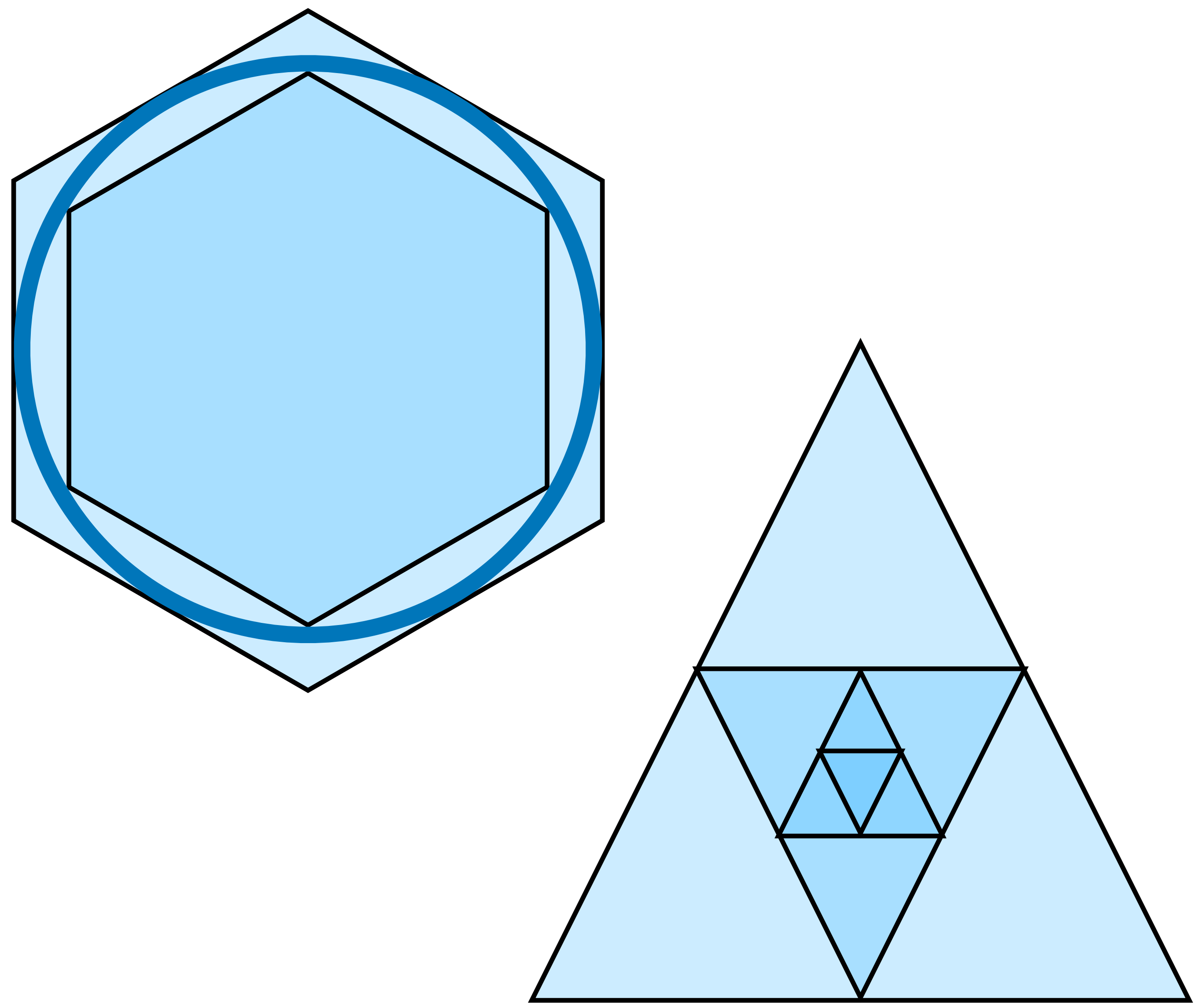
0,33   0,3   0,3333   0,333   0,33333   0,3333   …

(Ableitinger & Heitzer, 2013, S.7)

Konvergenz und Grenzwert

Propädeutischer Zugang

geometrische Erfahrungen zu Grenzprozessen



numerische Erfahrungen zu Grenzprozessen

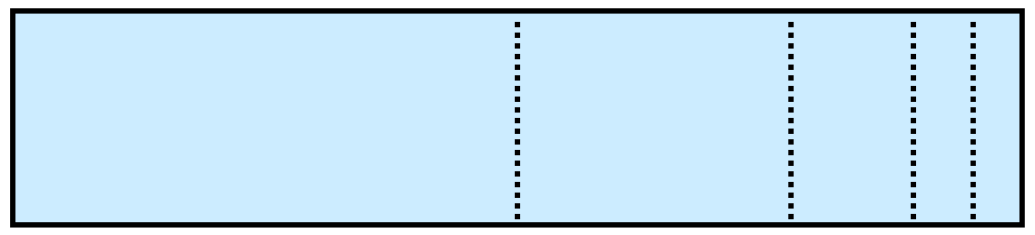
A: Nenne eine Zahl.
B: Finde einen Stammbruch, der kleiner ist als die Zahl.

$$\frac{1}{3} = 0{,}\bar{3} = 0{,}333\ldots = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots$$

Intervallschachtelung

$$0{,}\bar{9} = 1$$

geometrisch-numerische Erfahrungen



$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$$

Heron-Verfahren

(Greefrath et al., 2016, S. 107 ff.; Ableitinger & Heitzer, 2013, S. 3)

Konvergenz und Grenzwert

Propädeutischer Zugang

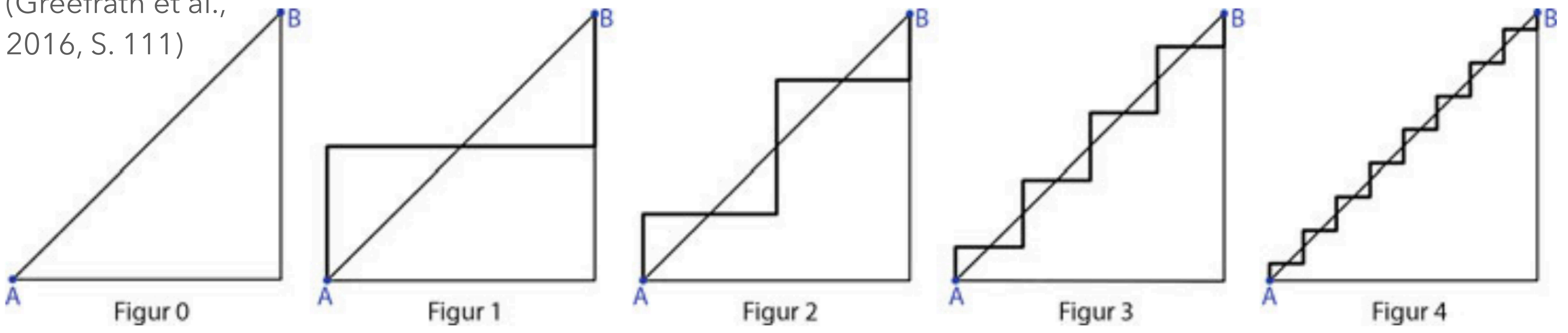
geometrische Erfahrungen zu Grenzprozessen

numerische Erfahrungen zu Grenzprozessen

geometrisch-numerische Erfahrungen

Gefahr eines geometrischen Zugangs ohne formale Definition!

(Greefrath et al., 2016, S. 111)



Konvergenz und Grenzwert

Kann man ohne formal korrekten Grenzwertbegriff erfolgreich ableiten und integrieren?
Ja. Das muss schon rein mathematikhistorisch als erwiesen gelten: Leibniz, Newton und ihre Schüler haben äußerst erfolgreich Infinitesimalrechnung betrieben, lange bevor Cauchy und Weierstrass ein lückenloses Grenzwertkonzept etablierten.

Gibt es Gründe, Ableiten und Integrieren auch ohne formal korrekten Grenzwertbegriff zu lehren?
Ja. Wir meinen nicht, dass „gleich mit seinem ganzen Analysis-Unterricht zu Hause bleiben" könne, wer nicht allen Schülerinnen und Schülern die echte Grenzwertproblematik zumuten mag (so Bender 1991). Differenzial- und Integralrechnung sind nicht zuletzt auch vom „Ingenieursstandpunkt" her wichtige Bildungsinhalte (s. Fazit).

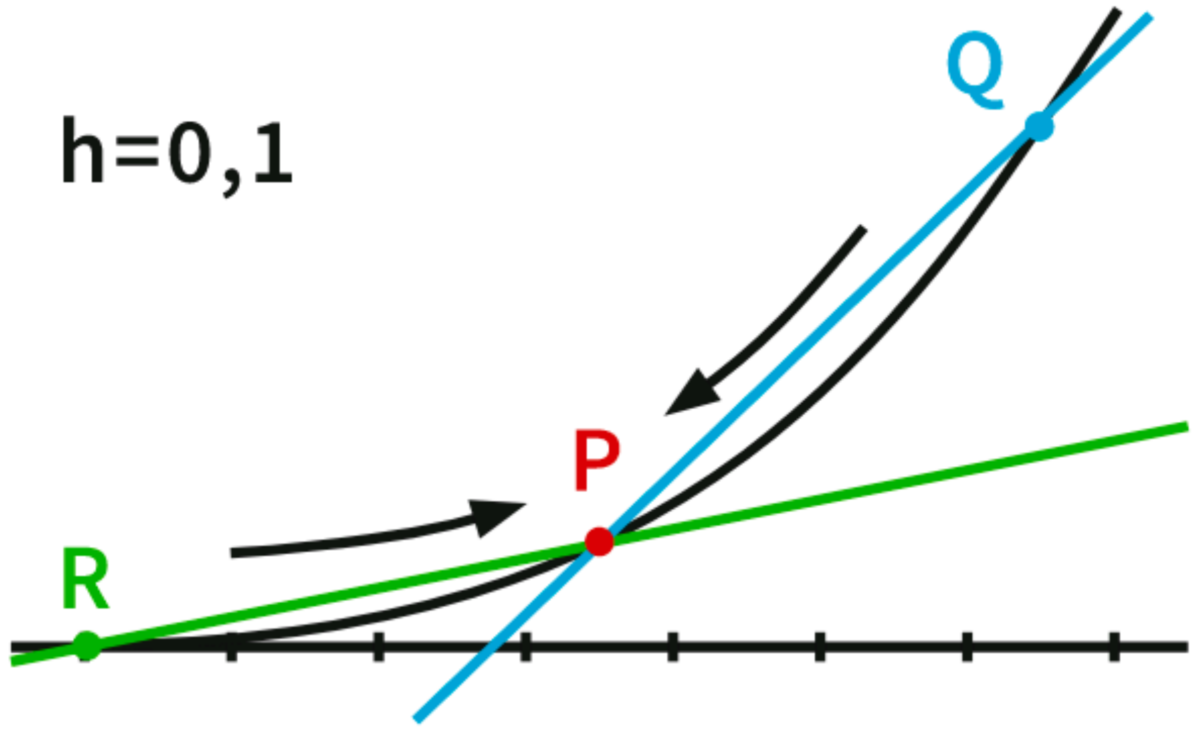
Kann man den Grenzwertbegriff ohne explizierte Kenntnisse über Folgen ganz erfassen?
Wir bezweifeln das: Wann immer man sich dem Grenzwertphänomen zu nähern versucht, greift man implizit auf Folgen zurück. Zieht man (wie bei jedem Einsatz einer Tabellenkalkulation) das Darstellungsmittel aufeinanderfolgender Werte hinzu, ist die Folge schon da. Zum Begriffsverständnis gehört die statische Sicht; und die ist schwerlich ohne Folgen zu formulieren. Bei der x_0(oder h)-Methode steht im Innern des Limes etwas, das Lernende nur als Term kennen. Wie begreift man ohne Folgen-Kenntnis, dass so etwas einen Grenzwert haben soll?

Sollte man in der Oberstufe auf der Ebene eines „propädeutischen" Grenzwertbegriffs bleiben?
Auf keinen Fall. Für alle, die nicht anschließend oder nebenbei Mathematik studieren, bleibt die schulische Darstellung „das letzte Wort". Außerdem gibt es in den meisten Lerngruppen Denker, die Unschärfen im ihnen Mitgeteilten erkennen und benennen. Nicht selten sind dies die gleichen Aspekte, die als vage Irritation auch bei anderen zu Lernblockaden führen. Dann sollte man Antworten parat haben, die – ohne das schwer Fassbare letztlich auszuräumen – einige Schritte weiter führen und manche Unklarheit beseitigen.

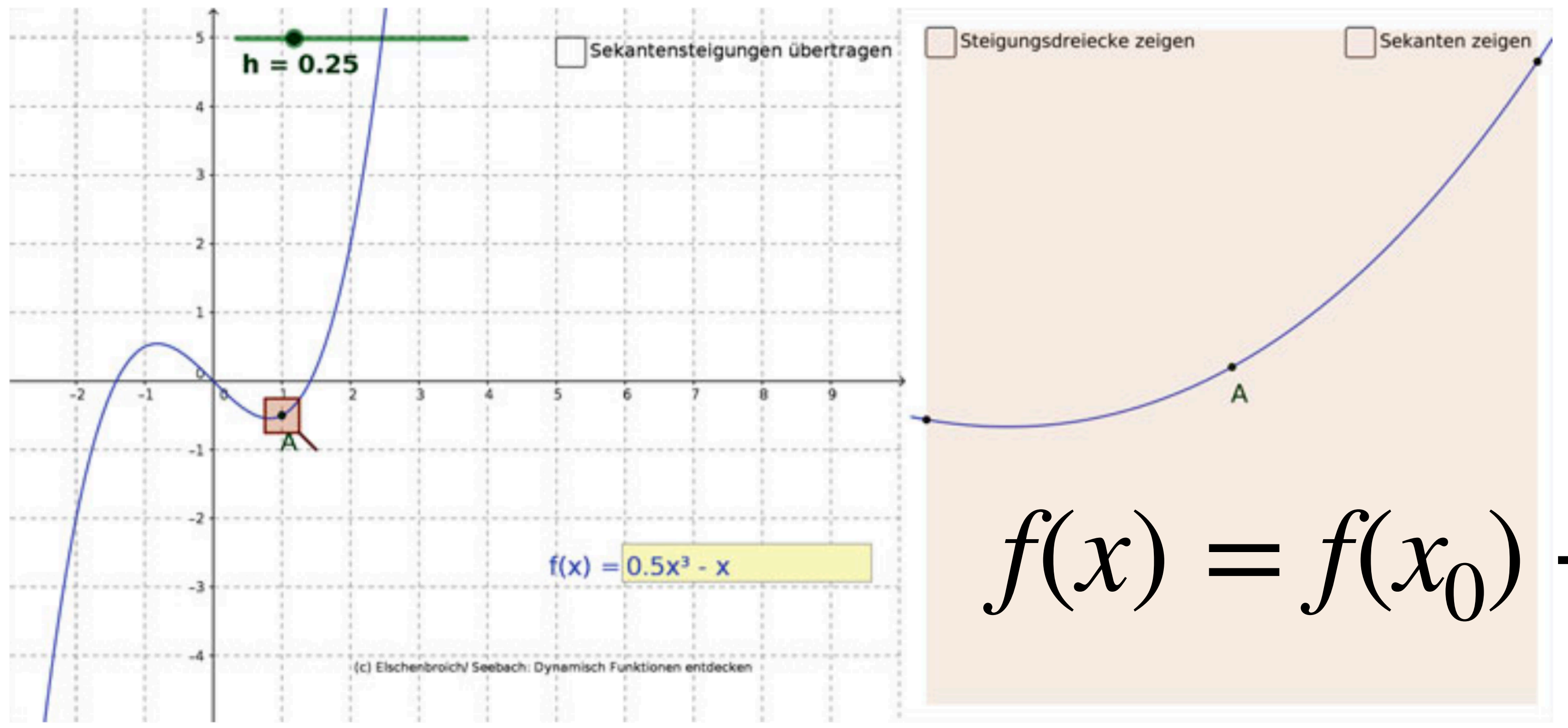
(Ableitinger & Heitzer, 2013, S. 9 f.)

Grundvorstellungen zur Ableitung

Anstieg der Tangente



Lokale lineare Approximation



$$f(x) = f(x_0) + m \cdot h + r(h)$$

mit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$

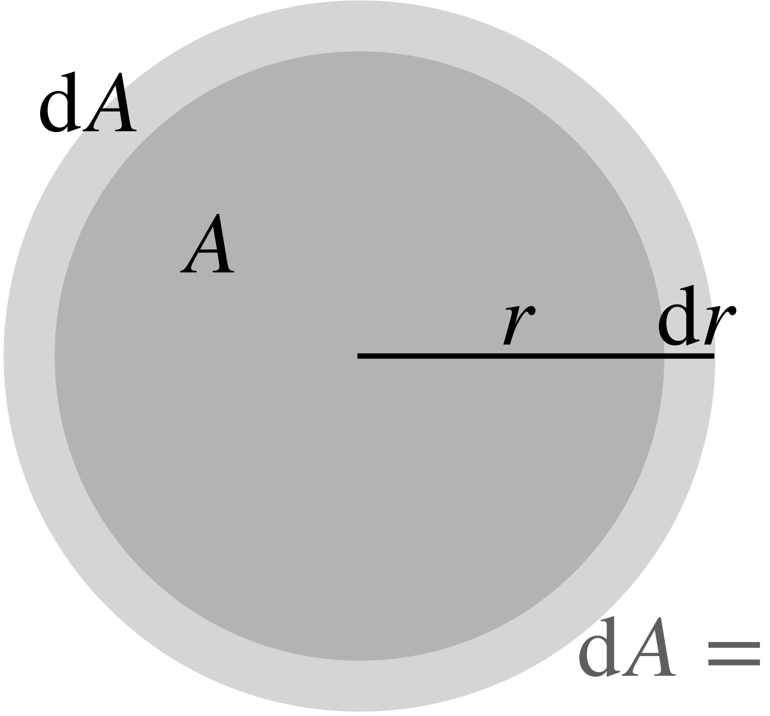
Lokale Änderungsrate

Durchschnittsgeschwindigkeit

$\rightarrow$ Momentangeschwindigkeit

Grenzwert von $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ für kleine Δx

Verstärkungsfaktor kleiner Änderungen

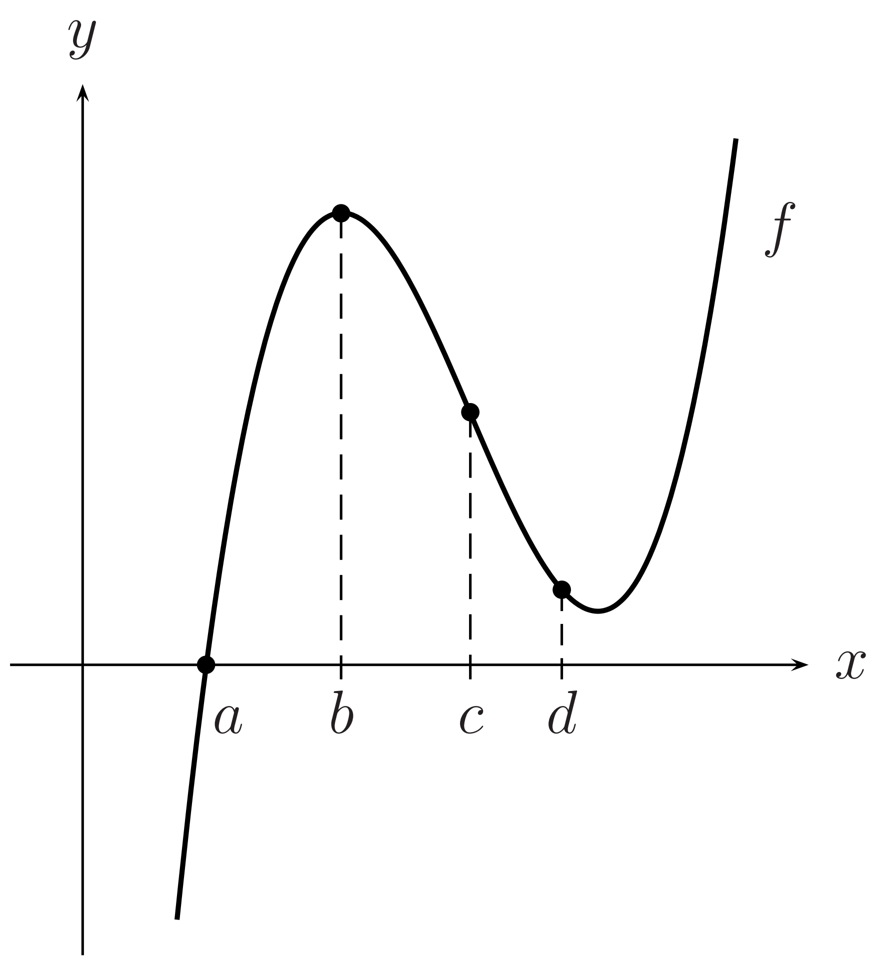


$\mathrm{d}A = 2\pi r\,\mathrm{d}r$

$$\Delta y \approx m \cdot \Delta x$$

(Greefrath et al., 2016, S. 147 ff.)

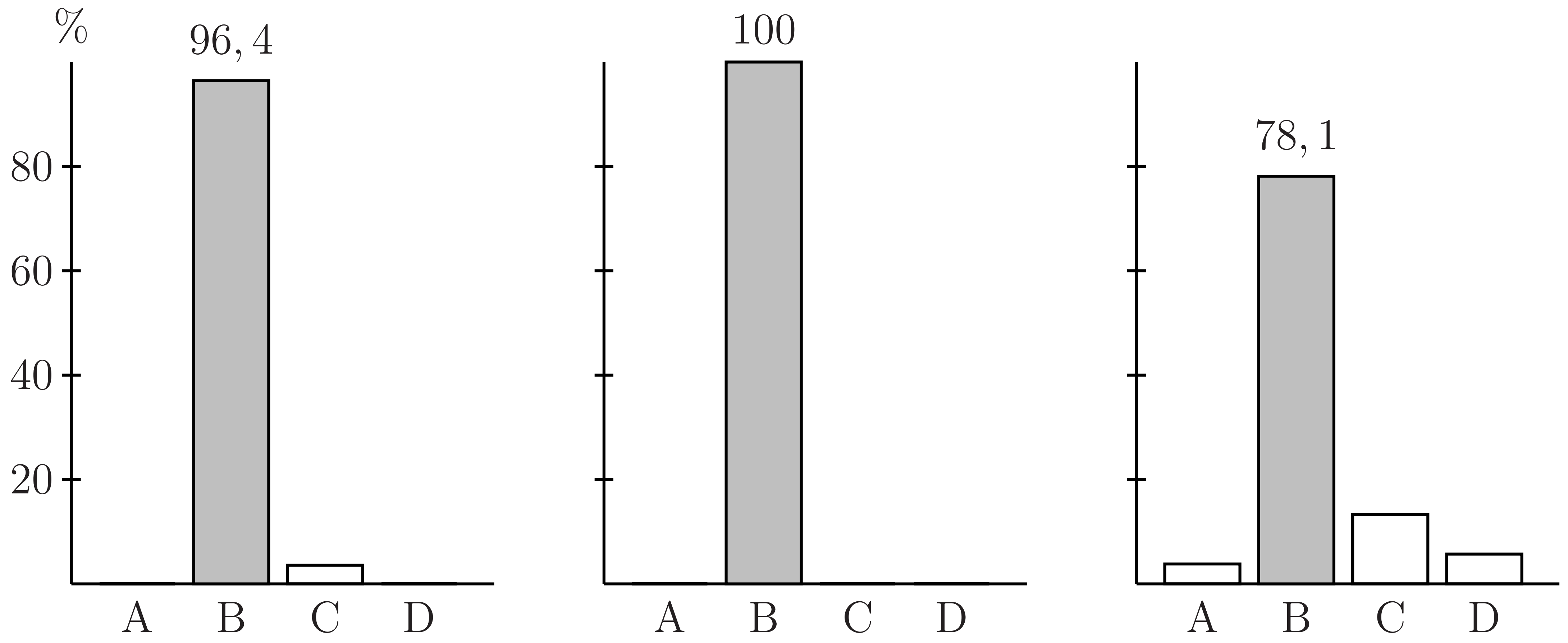
Vorstellungen zur Ableitung



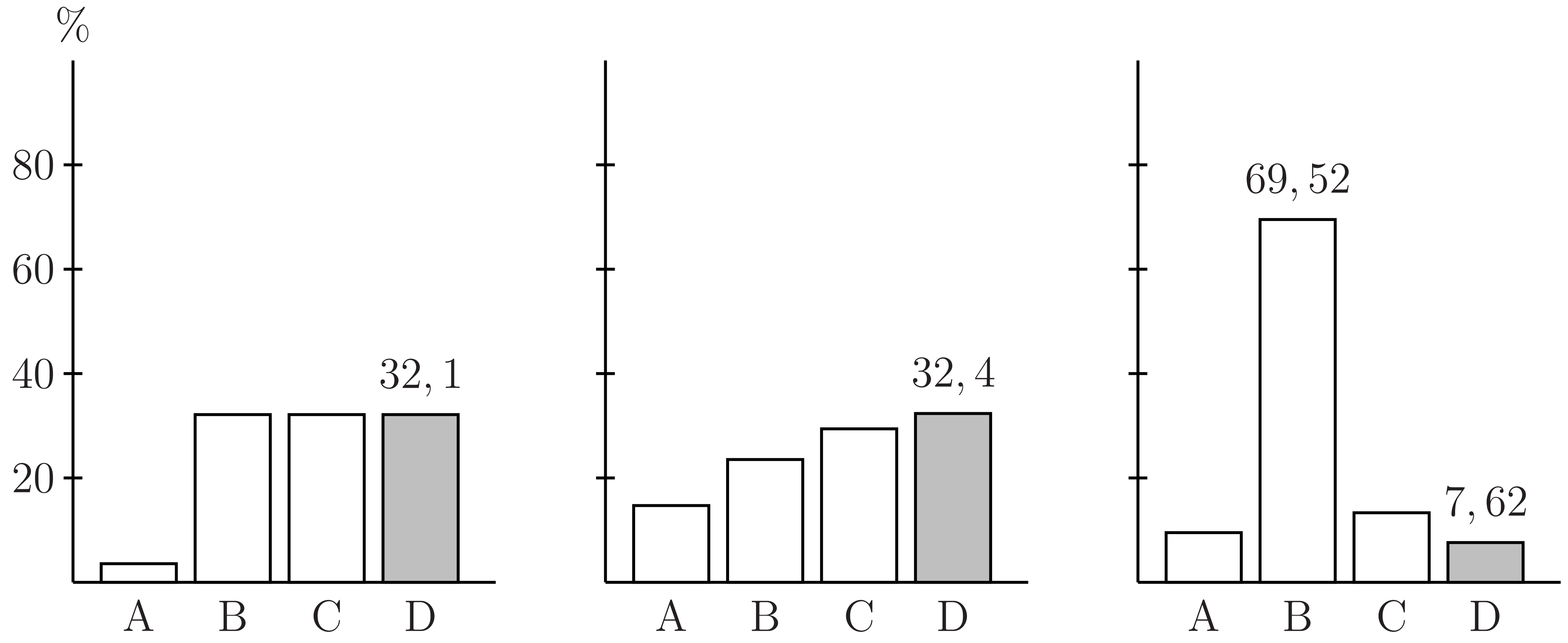
Aufgabe T.1 Die Ableitung hängt eng mit folgendem Begriff zusammen:

A Lösungsmenge B Anstieg C Nullstelle D Flächeninhalt

A $d-c-b-a$ B $a-d-c-b$ C $b-d-c-a$ D $c-d-b-a$



(a) Leistungskurs Kl. 12 (b) Leistungskurs Kl. 11 (c) Grundkurs Kl. 11



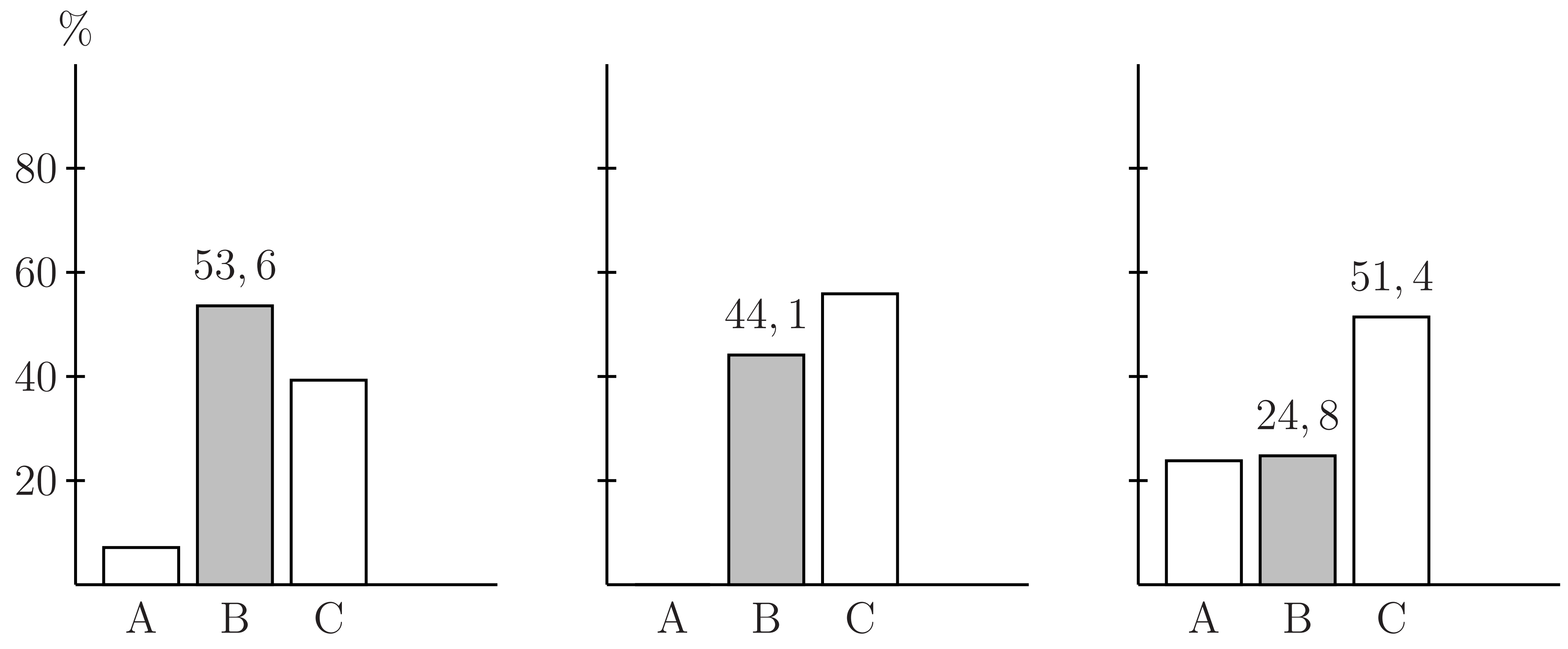
(a) Leistungskurs Kl. 12 (b) Leistungskurs Kl. 11 (c) Grundkurs Kl. 11

(Etzold, 2008, S. 37, 45 ff.)

Vorstellungen zur Ableitung

Aufgabe Ä.1 Der Begriff der Ableitung einer Funktion $f(x)$ an einer Stelle a stellt eine Antwort auf folgende Frage dar:

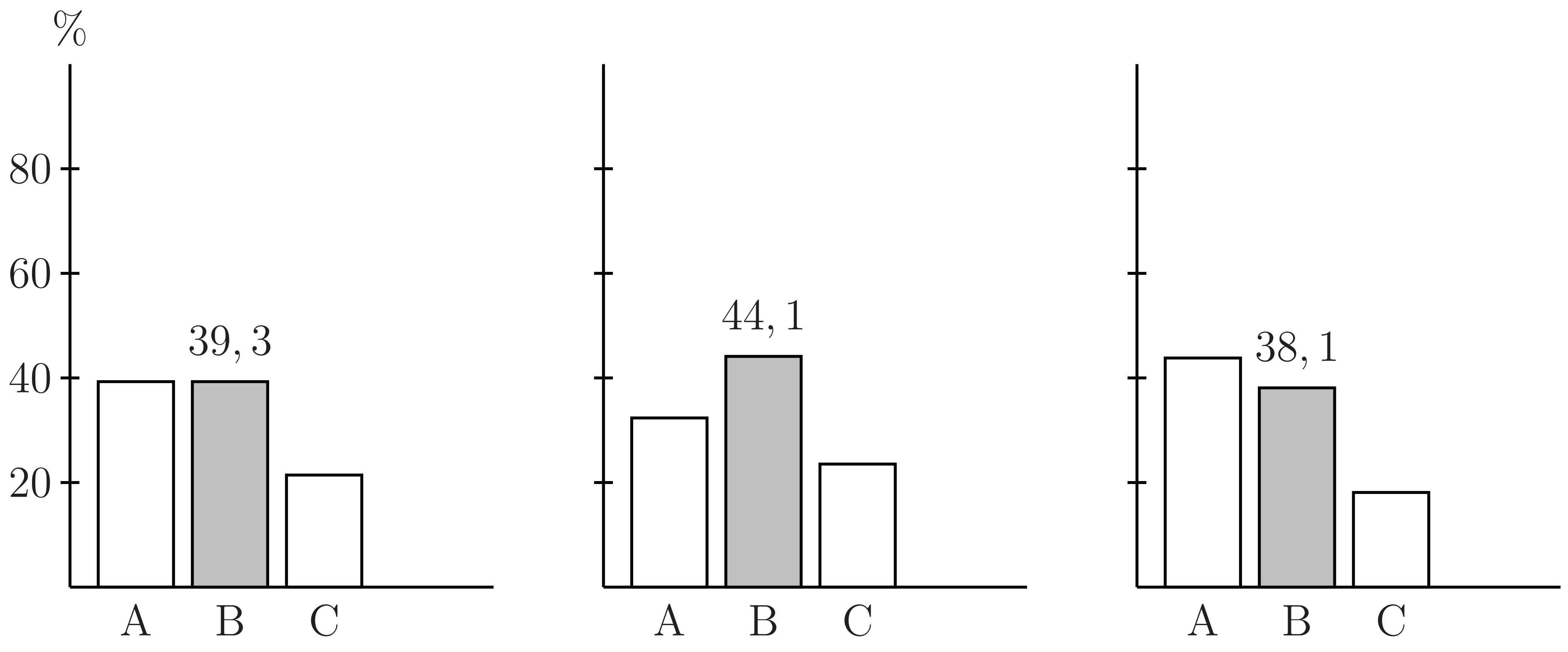
A Wie groß ist die Fläche unter dem Funktionsgraphen zwischen $x = 0$ und $x = a$?
B Wie ändert sich der Funktionswert, wenn x eine kleine Abweichung von a erfährt?
C Welchen Funktionswert hat f in der Nähe von $x = a$?



(a) Leistungskurs Kl. 12 (b) Leistungskurs Kl. 11 (c) Grundkurs Kl. 11

Aufgabe Ä.2 Eine Funktion f hat die Eigenschaften $f'(1) = 5$ und $f'(2) = 10$. Was bedeutet das?

A Der Funktionswert von f ist bei $x = 2$ größer als bei $x = 1$.
B Der Funktionswert von f ändert sich in der Nähe von $x = 2$ stärker als in der Nähe von $x = 1$.
C Die Krümmung des Graphen von f ist bei $x = 2$ stärker als bei $x = 1$.



(a) Leistungskurs Kl. 12 (b) Leistungskurs Kl. 11 (c) Grundkurs Kl. 11

(Etzold, 2008, S. 49 ff.)

Ableitung

Grundverständnis der lokalen Änderungsrate zugeordnet. Das Grundverständnis der linearen Approximation ist aus heutiger fachdidaktischer Sicht nicht so bedeutend wie jenes der lokalen Änderungsrate und sollte daher im Unterricht eine sekundäre (aber dennoch vorhandene) Rolle spielen.

(Etzold, 2008, S. 60)

– Änderungsraten berechnen und deuten,	L2	– mittlere und lokale Änderungsrate – mittlere Steigung einer Kurve in einem Intervall – Änderungsrate im Sachzusammenhang – Zusammenhang zwischen mittlerer bzw. lokaler Änderungsrate und Differenzenquotient bzw. Differentialquotient
– die Ableitung insbesondere als lokale Änderungsrate deuten,	L4	– Ableitung einer Funktion an einer Stelle – lokale Änderungsrate und Anstieg der Tangente – lokale Änderungsrate auch in Sachzusammenhängen
– die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen deuten.	L4	– graphisches Bestimmen von Funktionsgraphen der Ableitungsfunktion mithilfe des Anstiegs von Tangenten (graphisches Ableiten)

(Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, 2022, S. 25 ff.)

CAS-Einsatz

Computer-**A**lgebra-**S**ystem – ermöglicht symbolische Berechnung

```
solve(x^2=5,x)
```

numerische Berechnung

```
x=2.23607
```

symbolische Berechnung

```
x=√5,−√5
```

CAS-Einsatz

speziell für schulische Zwecke entwickelte Systeme

photomath GeoGebra CAS CAS-Taschenrechner (z. B. TI, Casio, …)

professionelle kommerzielle Systeme

Maple Mathematica

professionelle freie Systeme

Yacas Sage

http://sagecell.sagemath.org/

CAS-Einsatz

TR Taschenrechner

WTR Wissenschaftlicher Taschenrechner

GTR Graphikfähiger Taschenrechner

CAS Computer-Algebra-System

i. d. R. programmierbare Taschenrechner

DGS Dynamische Geometrie-Software

TK Tabellenkalkulation

LLM Large Language Models (aka KI, z. B. ChatGPT)

CAS-Einsatz

Bedienung schulen

`solve(Gleichung,Variable)`

`solve(x^2=5,x)`

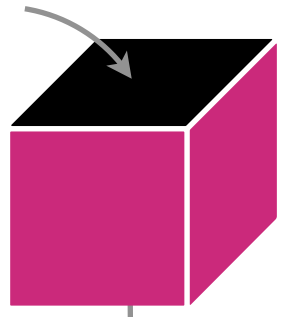
Der Befehl löst die Gleichung $x^2 = 5$, d. h. es werden diejenigen Werte für x gesucht, für die die Gleichung eine wahre Aussage ergibt.

identifizieren / realisieren

festigen

Blackbox-Interpretation

`solve(x^2=5,x)`



`x=√5,−√5`

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Befehle mit Lösungsverfahren in Bezug bringen;

ggf. (Pseudo-) Algorithmen besprechen

Fehler provozieren

Aufgabenkultur verändern

ursprüngliche Aufgabe
Löse die Gleichung $x^2 = 5$.

CAS als Prüfwerkzeug
Gib eine quadratische Gleichung an, die $\sqrt{5}$ als eine Lösung hat.

CAS-Lösung als Anlass
Erkläre, warum das CAS zwei Lösungen ausgibt.

oHiMi-Aufgabe
Bestimme die Lösungsmenge von $x^2 = 5$.

MBJS, 2022b

Literatur

Ableitinger, C., & Heitzer, J. (2013). Grenzwerte unterrichten. Propädeutische Erfahrungen und Präzisierungen. *mathematik lehren*, 180, 2–10.

Enders, J. (2024). *Analysis I (Lehramt). Skript zur Veranstaltung im WS 2023/24* [unveröffentlichtes Skript].

Etzold, H. (2008). *Der Ableitungsbegriff im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II – Eine Untersuchung zur Ausbildung von Schülervorstellungen* [1. Staatsexamensarbeit, Universität Leipzig]. https://doi.org/10.5281/zenodo.7538430

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2022). *Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Teil C. Mathematik*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2022b). Anlage zum Rahmenlehrplan für die gymnasiale Oberstufe. Teil C. Mathematik. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik_Anlage_OHiMi.pdf

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2023). *Rahmenlehrplan Brandenburg. Teil C, Mathematik, Jahrgangsstufen 1–10*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/getrennt_2023/BB_RLP_2023_Teil_C_Ma_GenF_1.pdf