

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 11 – Didaktik der Arithmetik und Algebra

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 11 – Didaktik der Arithmetik und Algebra

- Sie haben einen Überblick, was Arithmetik- und Algebra-Unterricht auszeichnet.
- Sie können den Zusammenhang zwischen den Sachgebieten Arithmetik und Algebra und den zugehörigen Leitideen beschreiben.
- Sie kennen Verfahren zum näherungsweise Bestimmen von Quadratwurzeln sowie deren algorithmische Umsetzung.

Arithmetik und Algebra

Arithmetik

Die **Arithmetik** (von **griechisch** ἀριθμός *arithmós*, „Zahl“, davon abgeleitet das Adjektiv ἀριθμητικός *arithmētikós*, „zum Zählen oder Rechnen gehörig“) ist ein **Teilgebiet der Mathematik**. Sie umfasst das **Rechnen** mit den Zahlen, vor allem den **natürlichen Zahlen**. Sie beschäftigt sich mit den **Grundrechenarten**, also mit der **Addition** (Zusammenzählen), **Subtraktion** (Abziehen), **Multiplikation** (Vervielfachen), **Division** (Teilen) sowie den zugehörigen Rechengesetzen (**mathematische Operatoren** bzw. **Kalküle**). Zur Arithmetik gehört auch die Teilbarkeitslehre mit den Gesetzen der **Teilbarkeit** ganzer Zahlen sowie der Division mit Rest. Die Arithmetik kann als Teil der **Algebra** verstanden werden, etwa als „Lehre von den algebraischen Eigenschaften der Zahlen“.^[1] Die Arithmetik leitet zur **Zahlentheorie** über, die sich im weitesten Sinn mit den Eigenschaften der Zahlen beschäftigt. Die Arithmetik ist ein Kalkül.^[2]

$$3 + 2 = 5$$

$$13 : 5 = 2 \text{ Rest } 3$$

$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$$

(Wikipedia, 2024)

Arithmetik und Algebra

Algebra

Die **Algebra** (von **arabisch** الجبر, **DMG** *al-ğabr* „das Zusammenfügen gebrochener Teile“) ist eines der grundlegenden **Teilgebiete der Mathematik**; es befasst sich mit den Eigenschaften von **Rechenoperationen**. Im Volksmund wird Algebra häufig als das Rechnen mit Unbekannten in Gleichungen bezeichnet (zum Beispiel $x + 1 = 2$); die Unbekannten



$$2x + 1 = 7$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$x + y = y + x$$

(Wikipedia, 2023)

Übergang Arithmetik → Algebra

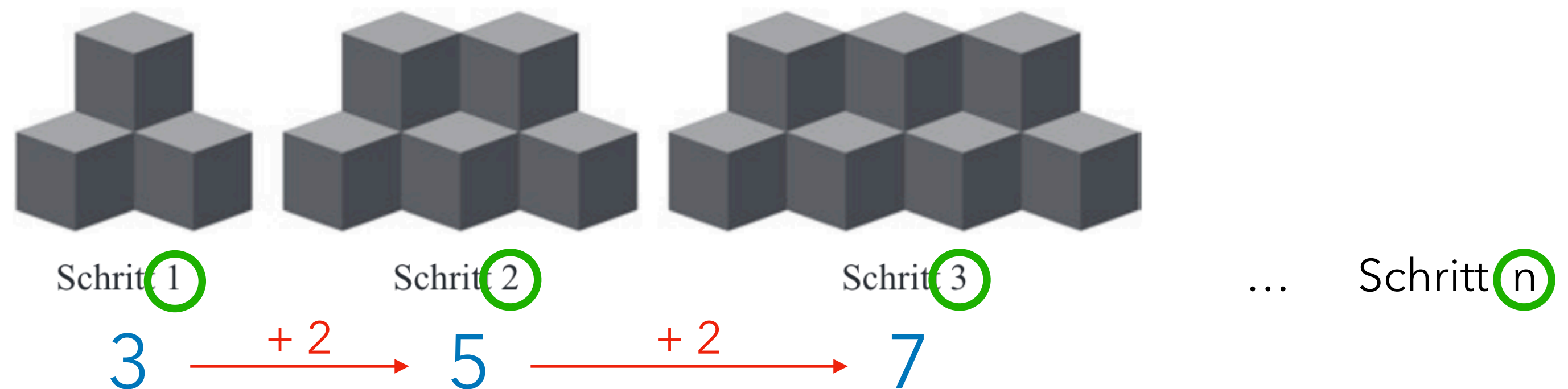
»Aus der Perspektive des Lehrens und Lernens von Algebra beginnt die Auseinandersetzung mit Algebra dort, wo Lernende allgemeine arithmetische Strukturen erkennen oder erkunden«

»In der Arithmetik sind Zahlen die Objekte des Handelns.«

In der Algebra »verändert sich der Fokus vom Handeln mit Zahlen zum Handeln mit unbekanntem Größen. Dabei können Lernende die bekannten Regeln des Operierens mit Zahlen auf die neuartige Situation übertragen, in der Zahlen unbekannt sind.«

(Weigand et al., 2022, 39 f.)

halbschriftliches
Rechnen



(Weigand et al., 2022, 8)

Was ist Algebra in der Schule?

Algebra als
Formelsprache

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

»Mithilfe von Variablen, Termen und Gleichungen kann ein Sachverhalt in der Formelsprache dargestellt werden.«

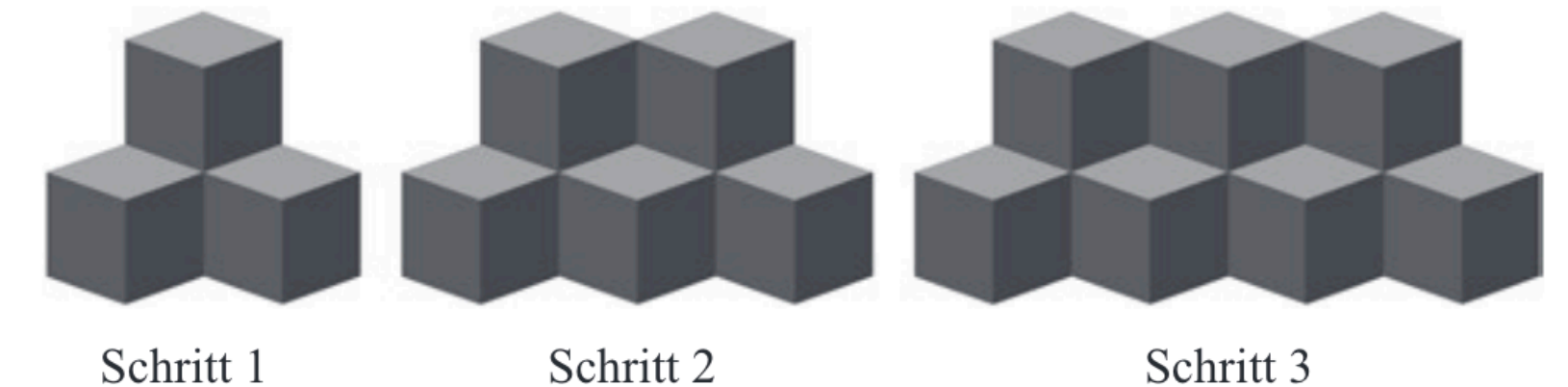
(Weigand et al., 2022, 1 ff.)

Algebra als
Werkzeug

Kosten für Taxifahrt
 $K = 4,4 + 2,1s$

»Algebra [ist] ein Hilfsmittel und Werkzeug, um geometrische, physikalische oder Anwendungsprobleme durch Formelsprache auszudrücken und so zu lösen«

Algebra als
Denkweise



»Algebraisches Denken zeigt sich somit im Umgang mit Denkobjekten beim Übergang von konkreten zu unbestimmten Objekten und beim Operieren auf der symbolischen Ebene.«

Bezug zu den Leitideen

Seite 15

4. Inhaltsbezogene Kompetenzen

Bei den folgenden inhaltsbezogenen Kompetenzen ist grundsätzlich daran gedacht, dass diese mit und ohne Medien erreicht werden sollen. Abweichungen davon werden explizit an den entsprechenden Stellen erwähnt.

Leitidee Zahl und Operation

Erster Schulabschluss

Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehört zum Beispiel die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik und Algebra.

Mittlerer Schulabschluss

Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik, Algebra und Stochastik.

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- nutzen sinntragende Vorstellungen von Operationen rationaler Zahlen (z. B. schrittweiser, halbschriftlicher Verfahren),
- untersuchen Zahlen nach ihren Faktoren, in einfachen Fällen ohne digitale Mathematikwerkzeuge,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, z.B. unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,
- rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf und erklären die Bedeutung der Rechenoperationen,
- beschreiben die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} und \mathbb{Q} an Beispielen,

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- nutzen sinntragende Vorstellungen von reellen Zahlen (z. B. Vollständigkeit der Zahlengerade),
- nutzen sinntragende Vorstellungen von Operationen rationaler Zahlen (z. B. schrittweiser, halbschriftlicher Verfahren),
- untersuchen Zahlen nach ihren Faktoren, in einfachen Fällen ohne digitale Mathematikwerkzeuge,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, z.B. unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,
- rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf und erklären die Bedeutung der Rechenoperationen,
- beschreiben die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sowie von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} an Beispielen,

Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik, Algebra und Stochastik.

(KMK, 2022, S. 15)

Bezug zu den Leitideen

Zahl und Operation

Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik, Algebra und Stochastik.

(KMK, 2022, S. 15, 17 f.)

Größen und Messen

Diese Leitidee umfasst das Bestimmen und Deuten von Größen unter Berücksichtigung des Grundprinzips des Messens. Dabei spielen neben Längen-, Flächen- und Volumenmessungen weitere Größen wie Winkel und Zeitspannen sowie die Berücksichtigung der Sachsituation einschließlich Vorstellungen über geeignete Repräsentanten eine Rolle. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind Arithmetik, Algebra und Geometrie.

Strukturen und funktionaler Zusammenhang

Die Leitidee umfasst funktionale Beziehungen zwischen Zahlen, Daten bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung geeigneter digitaler Mathematikwerkzeuge. Das umfasst auch das Lösen von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen und die Anwendung verschiedener Funktionenklassen bei der Bearbeitung von Problemen und in Sachsituationen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind Algebra und Funktionen.

Wurzeln

Kernfrage: »Warum ist es so schwierig, das Quadrieren rückwärts zu rechnen?«

Kontext: Quadrat mit halben Flächeninhalt finden

(Barzel et al., 2016, S. 94)

Zone der aktuellen Leistung: Quadrate bekannt; Seitenlängen abmessen; Flächeninhalt berechnen

Zone der nächsten Entwicklung: aus geg. Flächeninhalt Seitenlänge des Quadrates berechnen;
halbquantitative Zusammenhänge (*Wie ändert sich die Seitenlänge, wenn der Flächeninhalt halbiert wird?*)

Lernziel: Wir wollen für ein Quadrat mit einem bestimmten Flächeninhalt die Seitenlänge bestimmen können.

Wurzeln

Wesentliche aus Lernhandlungen zu gewinnende Erkenntnisse:

- Seitenlänge und Flächeninhalt eines Quadrates nicht proportional zueinander
zu vorgegebenen Quadraten Seitenlängen und Flächeninhalte bestimmen
- (strenge) Monotonie zwischen Seitenlängen und Flächeninhalt
Zuordnungen zwischen Flächeninhalten und Seitenlängen von Quadraten herstellen
- Wurzeln lassen sich nur näherungsweise bestimmen.
Intervallschachtelung

Wurzeln

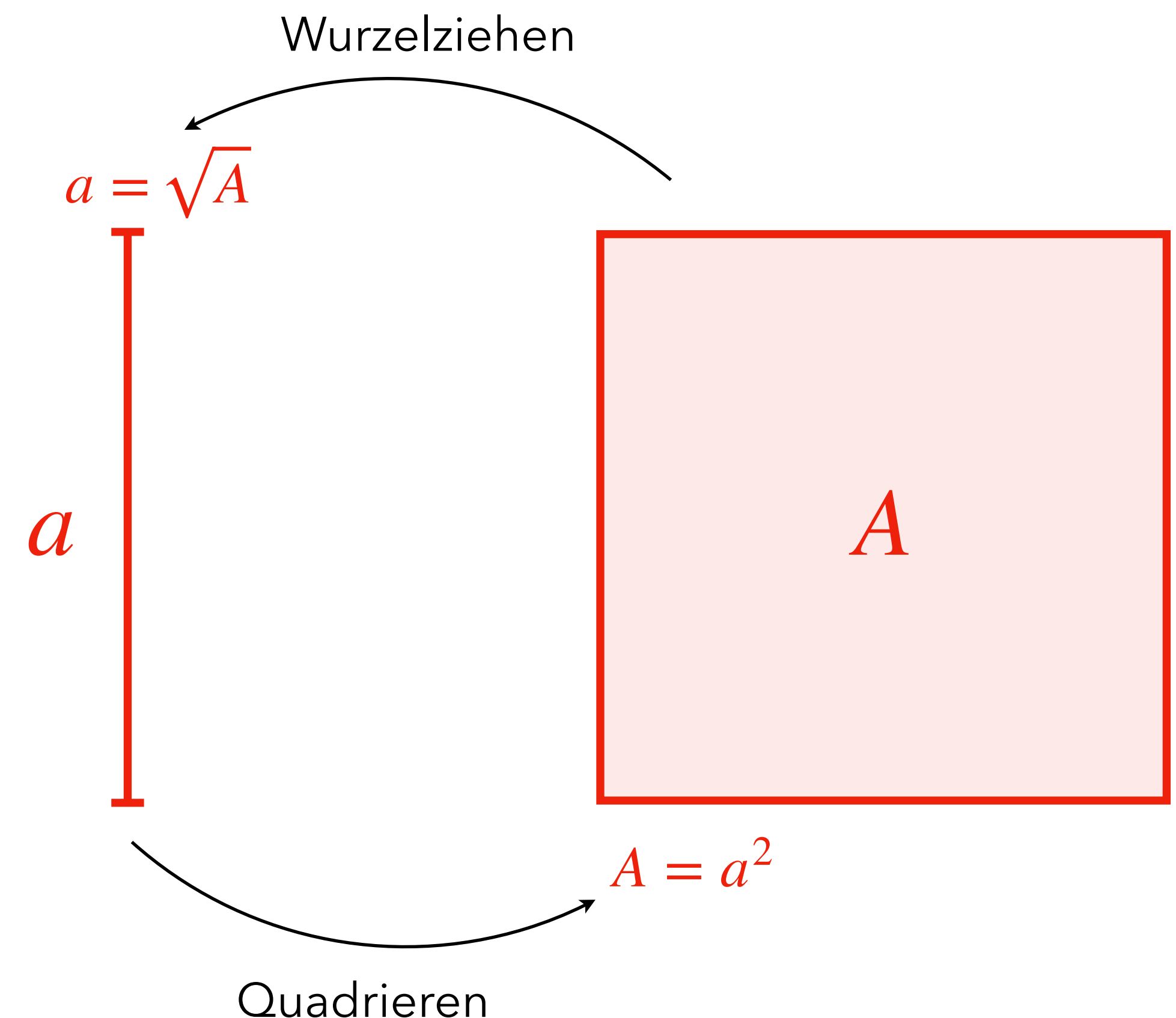
mögliche Definition

Die Quadratwurzel einer nichtnegativen Zahl A ist diejenige nichtnegative Zahl a , für die $a^2 = A$ gilt.

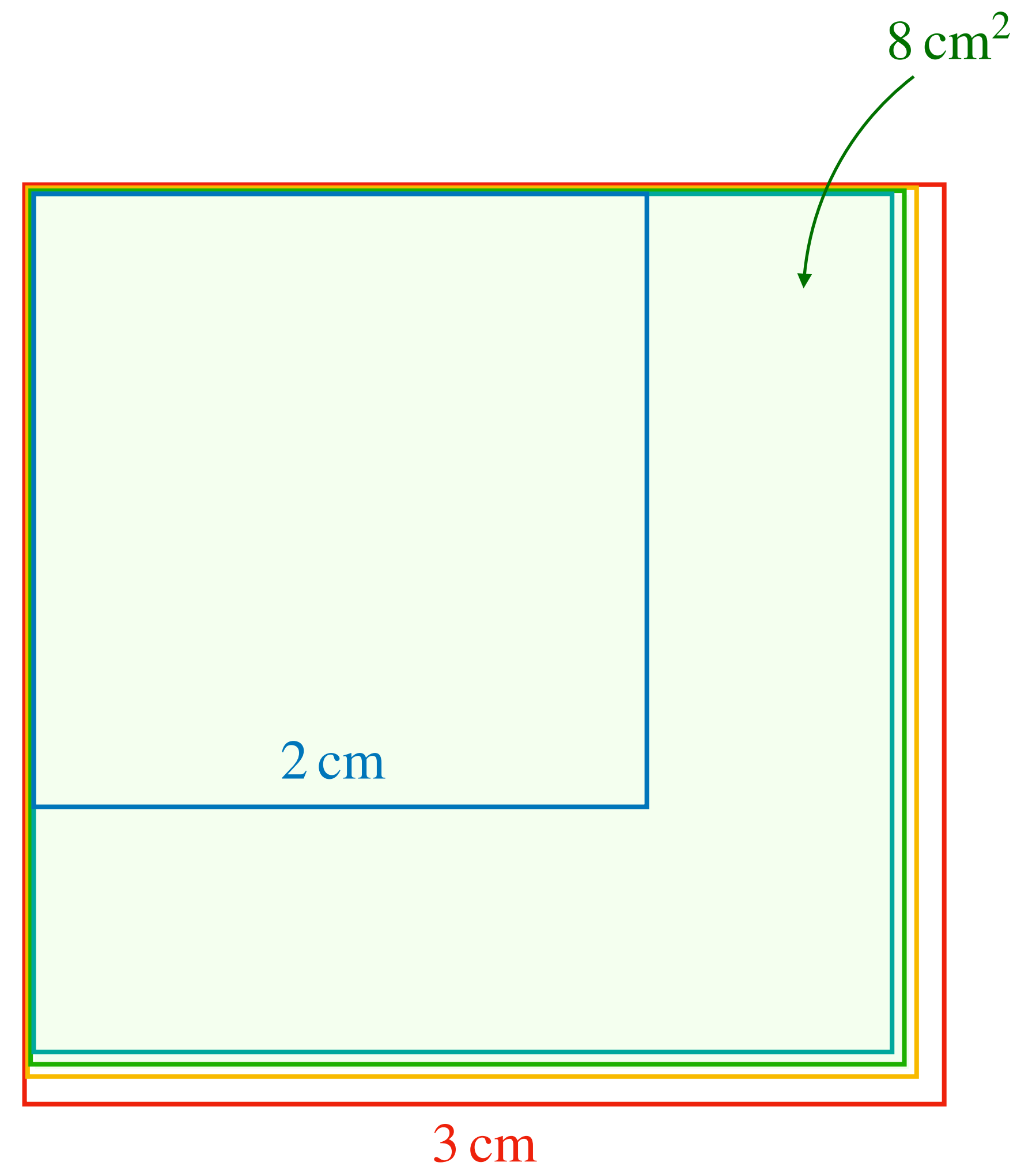
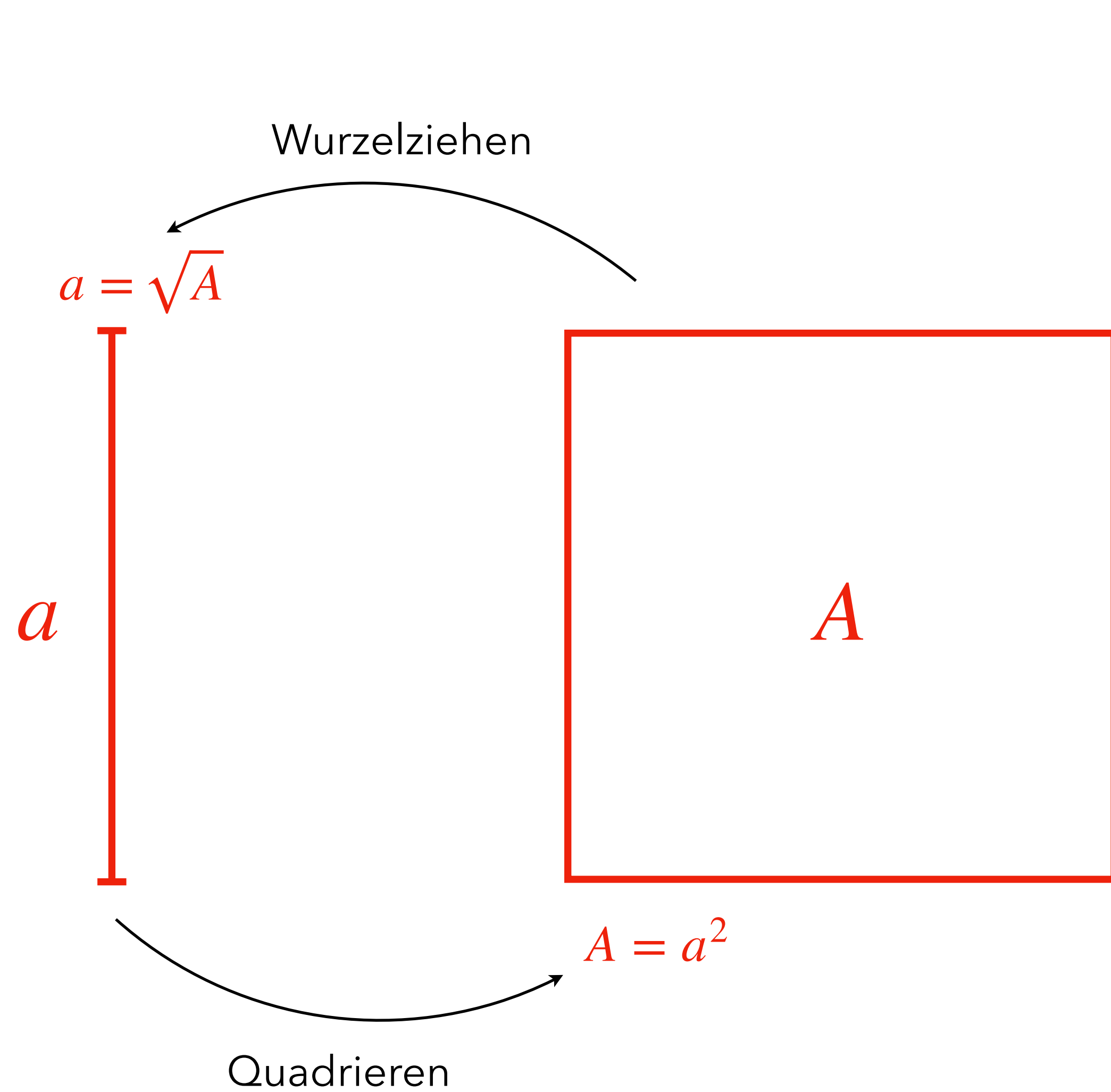
Man schreibt: $a = \sqrt{A}$

Beispiel: $\sqrt{9} = 3$, denn $3^2 = 9$

Achtung! Es ist zwar $(-3)^2 = 9$, aber $\sqrt{9} \neq -3$, da -3 negativ ist.
Außerdem ist $\sqrt{-9}$ nicht definiert, da -9 negativ ist.

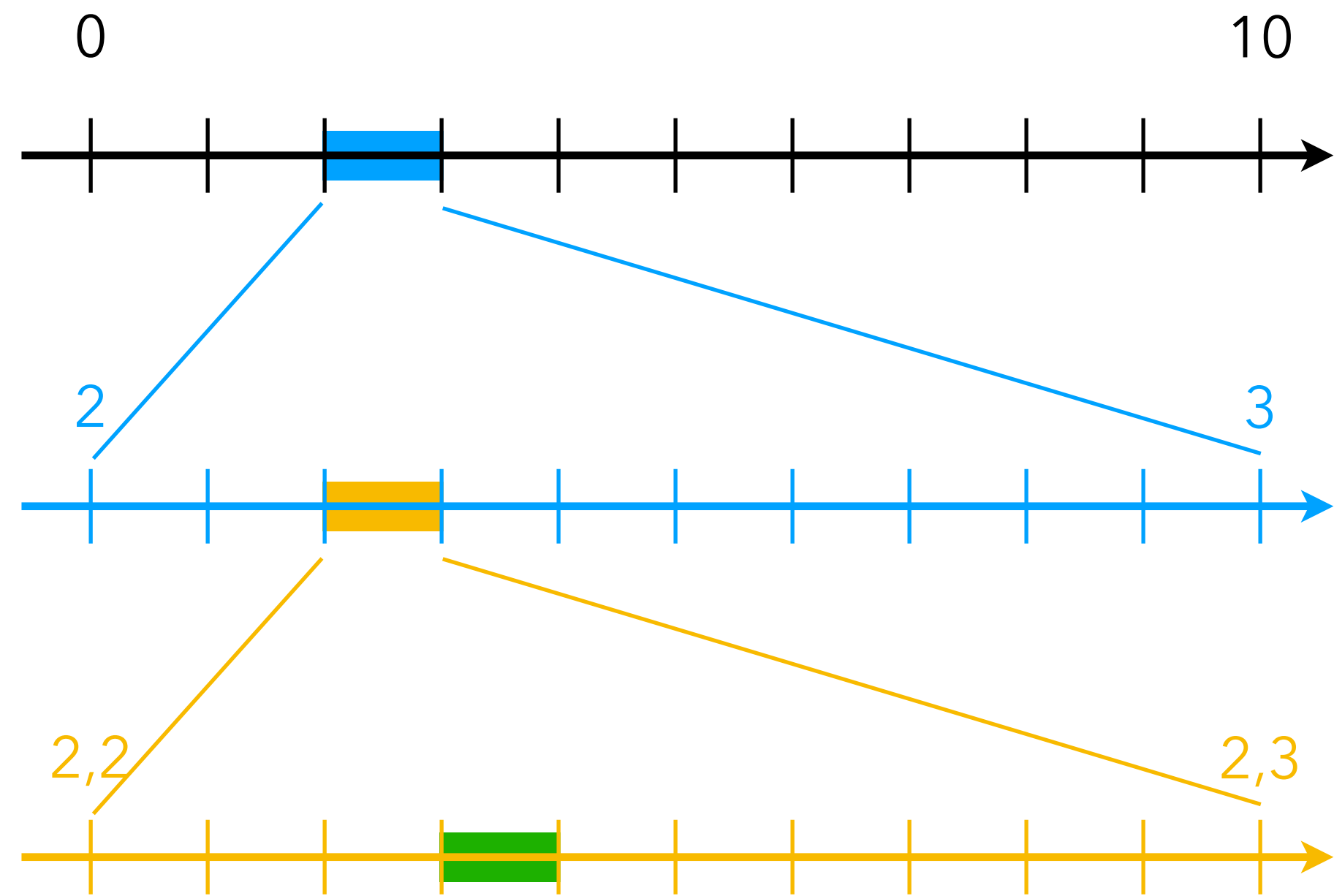


Wurzeln



Wurzeln

Intervallschachtelung



$$2^2 = 4$$

$$\sqrt{5^2} = 5 \quad 3^2 = 9$$

$$2,2^2 = 4,84$$

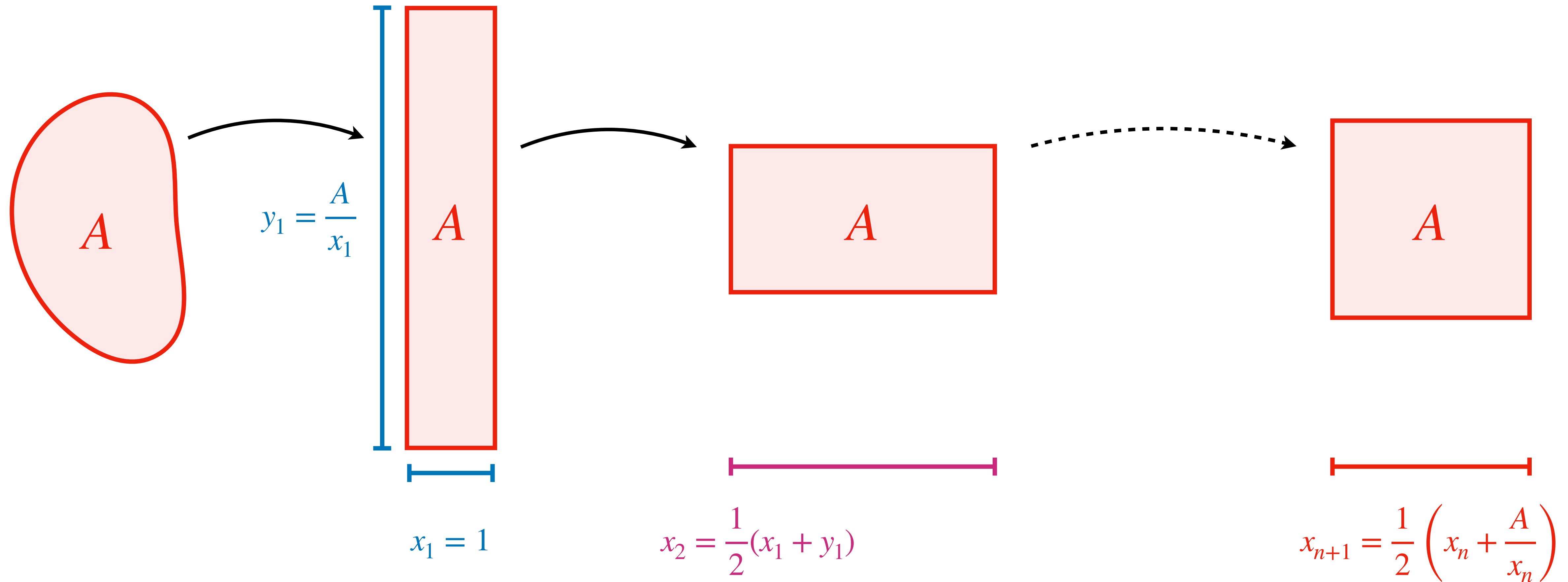
$$\sqrt{5^2} = 5 \quad 2,3^2 = 5,29$$

$$2,23^2 = 4,9729$$

$$\sqrt{5^2} = 5 \quad 2,24^2 = 5,0176$$

Wurzeln

Heron-Verfahren



Literatur

Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T., & Prediger, S. (Hrsg.). (2016). *Mathewerkstatt. 9, Schulbuch* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl.). Cornelsen.

[KMK] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1>

Wikipedia (2023). *Algebra - Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Algebra&oldid=237899409>

Wikipedia (2024). *Arithmetik - Wikipedia, Die freie Enzyklopädie*. <https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Arithmetik&oldid=240938583>