

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 10 – Intermezzo: Arithmetisches Mittel

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 10 – Intermezzo: Arithmetisches Mittel

- Sie können die Strukturierung einer Unterrichtsstunde zum arithmetischen Mittel nachvollziehen.
- Sie erkennen den Nutzen stoffdidaktischer Analysen und tätigkeitstheoretischer Modelle für die strukturierte Planung von Mathematikunterricht.
- Sie kennen die Lehrstrategie des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten als weitere Möglichkeit, Begriffe zu bilden.

Gestaltung des Lernprozesses

Begriff
Arithmetisches Mittel

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung**; **Lernzielbildung**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren** von Kenntnissen und Fähigkeiten

Stoffvermittlung

Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen** schaffen und **Aneignungshandlungen etappenweise verinnerlichen**

Begriff bilden
Identifizieren/Realisieren

Festigung

vielfältiges **Üben** & komplexes **Anwenden**

Merkmalsvariation,
Spezial- und Extremfälle

Kontrolle (und Bewertung)

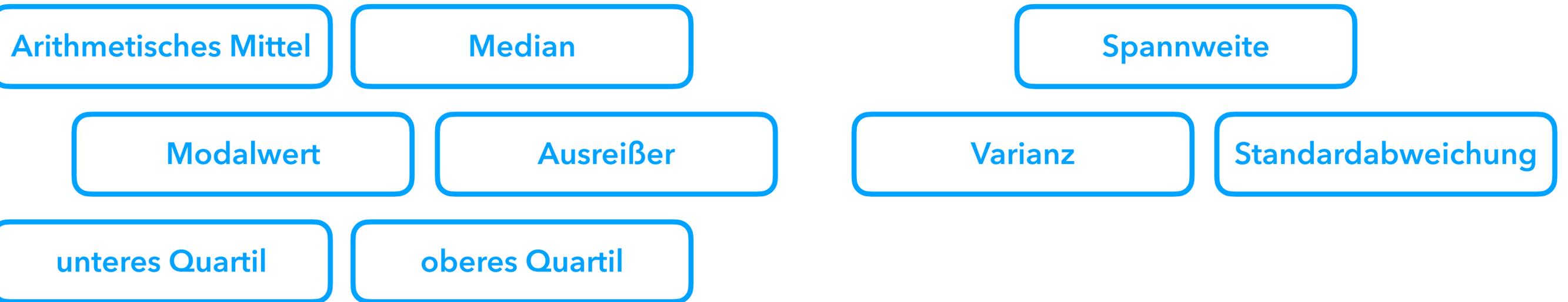
Abgleich zwischen Handlungsverlauf, Handlungsergebnis und Lernziel

(Bruder, 1991)

Lage- und Streumaße

Kernfrage Wie kann ich statistische Erhebungen miteinander vergleichen?

Begriffe



Verfahren

Boxplot zeichnen



Sachverhalte

Verschiebungssatz

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \left(\sum x_i^2 \right) - n\bar{x}^2$$

Lage- und Streumaße

Kernfrage Wie kann ich statistische Erhebungen miteinander vergleichen?

Begriffe

Arithmetisches Mittel

metrische Daten



Sprungweite

124 m 132 m
128 m
150 m 141 m

Median

ordinale Daten



Wie geht's und denn heute?

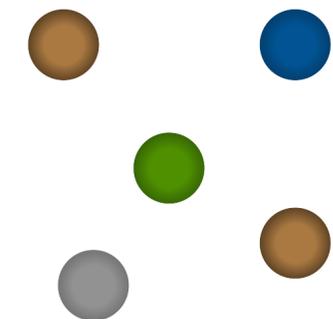
gut so la la
schlecht
so la la gut

Modalwert

nominale Daten



Augenfarbe



Lage- und Streumaße

- Kernfrage** Wie kann ich statistische Erhebungen miteinander vergleichen?
- Wie kann ich viele Ergebnisse einer Messreihe mit nur einem Wert beschreiben?
- Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen?

Begriffe

Arithmetisches Mittel

metrische Daten

Median

ordinale Daten

Modalwert

nominale Daten

Lage- und Streumaße

Kernfrage

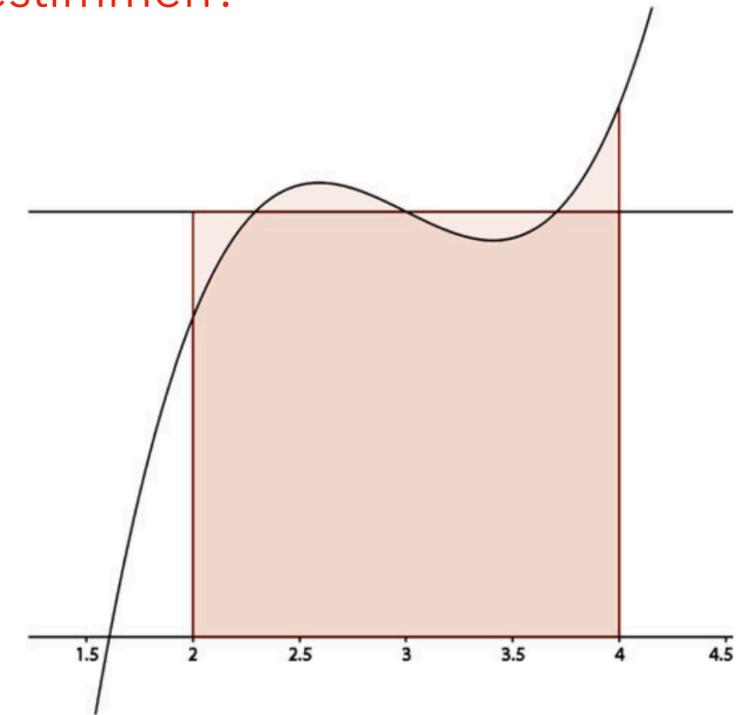
Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen?

Arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} = \frac{\sum_{j=1}^k H(x_j) \cdot x_j}{\sum_{j=1}^k H(x_j)}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$



- **fiktive Größe**
- **Vergleichswert**
- **Prognosewert**
- **repräsentativer Wert**

(Greefrath et al., 2016, S. 251; Krüger et al., 2015, S. 56 f)

- fiktive Größe
- Vergleichswert
- Prognosewert
- repräsentativer Wert

Arithmetisches Mittel

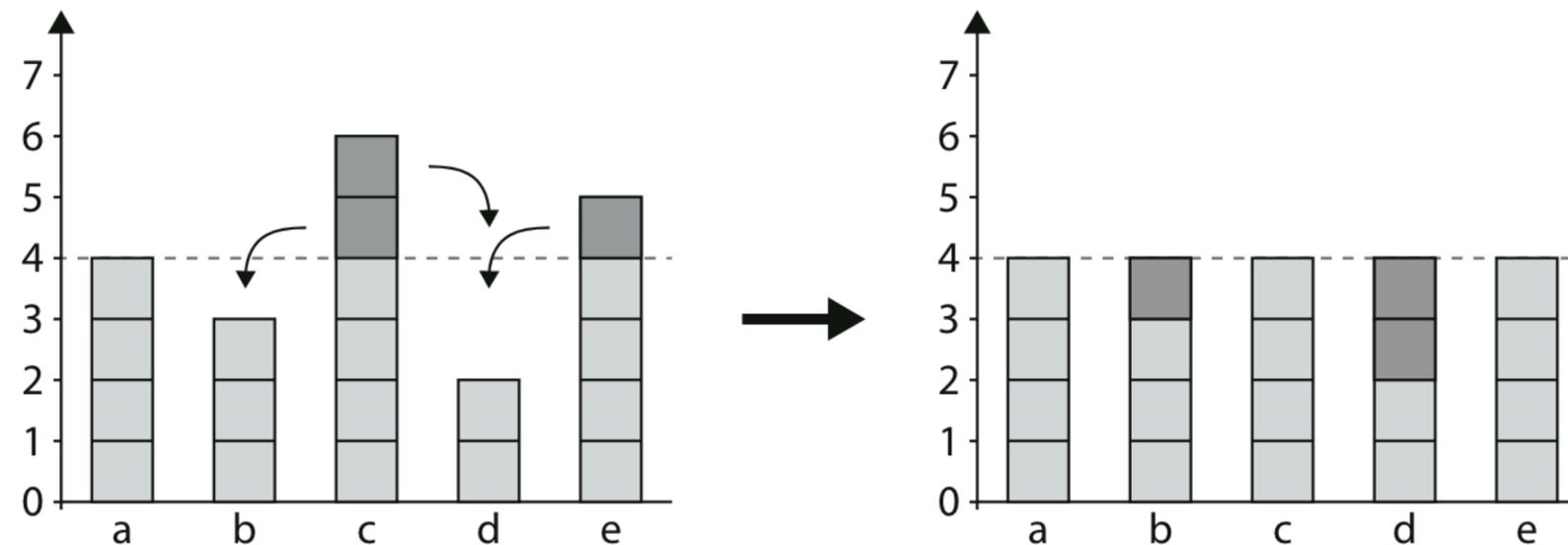
Kernfrage

Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen?

Wert der gleichmäßigen Verteilung



Ausgleichswert



(Krüger et al., 2015, S. 56 ff., 64)

- fiktive Größe
- Vergleichswert
- Prognosewert
- repräsentativer Wert

Arithmetisches Mittel

Kernfrage

Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen?

Kontext

Lebensweltbezug

Authentizität

Reichhaltigkeit

Sportliche Leistungen miteinander vergleichen



Arithmetisches Mittel

Motivierung & Zielbildung

Kontext

Sportliche Leistungen miteinander vergleichen

Kernfrage

Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen?

Sicherung des Ausgangsniveaus

Ziele der Unterrichtsstunde



Lernziel

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen kann.



Lehrziel Lernziel Kompetenzziel

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... können das arithmetische Mittel einer Messreihe berechnen.
- ... können erklären, wofür man das arithmetische Mittel benötigt.

schlechtere Formulierungen:

- ... kennen das arithmetische Mittel.
- ... wissen, wofür man das arithmetische Mittel benötigt.

Arithmetisches Mittel

Motivierung & Zielbildung

Kontext

Sportliche Leistungen miteinander vergleichen

Kernfrage

Wie kann ich das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen?

Lernziel

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen kann.

Wir wollen nicht nur herausfinden, **wer** besser ist, sondern wollen lernen, **wie** wir das herausfinden.

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... können das arithmetische Mittel einer Messreihe berechnen.
- ... können erklären, wofür man das arithmetische Mittel benötigt.

Luca und Alex haben Weitsprung geübt. Wer von den beiden ist besser?

Lucas Sprungweiten: 3,20 m; 1,90 m; 3,00 m; 2,90 m

Alex' Sprungweiten: 3,10 m; 2,90 m; 2,70 m; 2,60 m; 3,00 m

Einstiegsalternativen

- realen Wettbewerb durchführen und Daten nutzen
- Daten aus vorherigen Stunden verwenden
- Anzahlen der Messwerte sollten nicht gleich sein
- Messreihe mit mehr Werten sollte keine kleinere Summe haben als andere Messreihe
- Gefahr der Zielverschiebung (Wettbewerb statt Mathematik)

Plenum / Murrelphase

- Situation analysieren, Vorschläge zur Lösung einholen
Wie kann ich die beiden miteinander vergleichen?
Was heißt es, besser zu sein?
- Lernziel gemeinsam herausarbeiten (und ggf. festhalten)

Lernziel

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen kann.

Arithmetisches Mittel

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... können das arithmetische Mittel einer Messreihe berechnen.
- ... können erklären, wofür man das arithmetische Mittel benötigt.

Stoffvermittlung

Erkundungsauftrag, z. B. in Partnerarbeit

1. Begründe, warum es nicht ausreicht, die Gesamtweiten von Luca und Alex zu vergleichen.
2. Zeichne dir die Sprungweiten für Luca in einem geeigneten Maßstab nebeneinander.
Stell dir vor, Luca wäre jedes mal gleich weit gesprungen. Wie weit wäre das bei der gleichen Gesamtweite jeweils gewesen?

3. Wiederhole das Vorgehen mit Alex' Sprungweiten vergleiche anschließend die durchschnittlichen Leistungen der beiden.

Plenum

- 1. kurz besprechen
- Vorgehen bei 2. beschreiben und begründen lassen.
Wie bist du vorgegangen?
- Ergebnis bei 3. kurz vergleichen
- Allgemeinheit (unabhängig vom Kontext) herausarbeiten.
Was muss man also allgemein tun, wenn man eine Messreihe hat und den durchschnittlichen Wert bestimmen möchte?
- Bezeichner »arithmetisches Mittel« einführen
- Aufschreiben einer Definition und eines Vorgehens zum Bestimmen des arithmetischen Mittels

Lernziel

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen kann.

Stoffvermittlung

Plenum

- Aufschreiben einer Definition und eines Vorgehens zum Bestimmen des arithmetischen Mittels
- Erstaneignung
 - Beispiel in Anschluss an Definition
 - berechnen und beschreiben
 - Fehler finden und korrigieren

Arithmetisches Mittel

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... können das arithmetische Mittel einer Messreihe berechnen.
- ... können erklären, wofür man das arithmetische Mittel benötigt.

möglicher Heferaufschrieb

Arithmetisches Mittel

Das **arithmetische Mittel** \bar{x} beschreibt einen Durchschnittswert einer Messreihe.

Hat man die Messwerte x_1, x_2, \dots, x_n , so gilt: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$

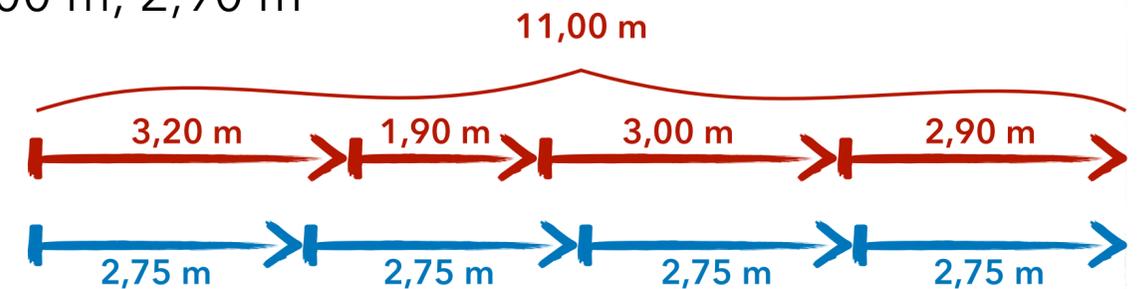
Man berechnet das arithmetische Mittel, indem man:

1. zuerst alle Messwerte addiert und
2. anschließend das Ergebnis durch die Anzahl der Werte teilt.

Beispiel:

Sprungweiten 3,20 m; 1,90 m; 3,00 m; 2,90 m

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{3,2 + 1,9 + 3 + 2,9}{4} \\ &= \frac{11}{4} = 2,75\end{aligned}$$



Lernziel

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen kann.

Stoffvermittlung

Plenum

- Aufschreiben einer Definition und eines Vorgehens zum Bestimmen des arithmetischen Mittels
- Erstaneignung
 - Beispiel in Anschluss an Definition
 - berechnen und beschreiben
 - Fehler finden und korrigieren

Arithmetisches Mittel

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... können das arithmetische Mittel einer Messreihe berechnen.
- ... können erklären, wofür man das arithmetische Mittel benötigt.

Aufgaben zur Erstaneignung

- 1.** Berechne das arithmetische Mittel.
Beschreibe anschließend dein Vorgehen.



- a)** 2; 4; 3; 7; 8
b) 2,5; 1,2; 5; 7,2



- a)** 5; 2; 8; 3; 4
b) 3,1; 1,2; 7; 4,8

- 2.** Erkläre, welcher Fehler beim Berechnen des arithmetischen Mittels der Datenreihe 10; 17; 12; 13; 20 gemacht wurde und korrigiere ihn.

$$\bar{x} = 10 + 17 + 12 + 13 + 20 : 5 = 56$$

- 3.** Beschreibe, wie du beim Berechnen des arithmetischen Mittels mit dem Taschenrechner vorgehen kannst.

Lernziel

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen kann.

Arithmetisches Mittel

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... können das arithmetische Mittel einer Messreihe berechnen.
- ... können erklären, wofür man das arithmetischen Mittel benötigt.

Festigung

Prüfungen machen Kopf die Aufgabe
 • möglichst als zusammenfassendes Objekt
 • auf verschiedenen Niveaus auswerfen
 • operativ durchrechnen/ (Prüfung)
 • beim Auslösen revidieren!

Natürlich muss nicht jede Aufgabe der erstinständigen Aufgaben haben, die „Nachbesserungen“.

Aufgabentypen
 • **Erkenntnis**
 • **Problemlösen**
 • **Optimierung**
 • **Strukturieren**
 • **Verbinden**
 • **Übertragen**

Techniken für das Erzeugen
 • **Problem lösen**
 • **Übertragen**
 • **Optimierung**
 • **Strukturieren**
 • **Verbinden**
 • **Übertragen**

Eine didaktisch und mathematisch dankbare Tätigkeit
 Intelligentes Üben hat nach den vorangegangenen Ausführungen einen hohen Mehrwert für die Lernenden – und ganz nebenbei für die Lehrenden. Diese Aufgabenkonstruktion ist mehr als langweiliges Alltagsgeschäft. Wenn Sie sich erst einmal darauf eingelassen haben, werden Sie feststellen, dass Sie im doppelten Sinne wieder zum Forscher werden.

Hier nur zwei Beispiele:

Beispiel 1: Sie möchten, dass Schülerinnen und Schüler die Quadratzahlen und Primzahlen memorieren. Dazu überlegen Sie sich, dass die Schüler möglichst oft mit Quadratzahlen und Primzahlen operieren. Sie nutzen die Technik „Erfinde Aufgaben ... mit den Lösungen ...“, die Ihnen problemorientierte Übungsaufgaben erzeugt. Zum Beispiel:

Suche möglichst viele Lösungen zu der Aufgabe:
 $\square + \square = \square$
 Dabei sollen in den Kästen nur Primzahlen oder Quadratzahlen stehen.

mind. 2 Aufgaben

mind. 3 Aufgaben

- zum Teil in Einzelarbeit
- Vergleich z. B. über Lösungszettel
- ggf. Unterbrechung für Besprechung im Plenum

(Leuders, 2009, S. 137 ff.)

Lernziel

Wir wollen lernen, wie man das durchschnittliche Ergebnis einer Messreihe bestimmen kann.

Arithmetisches Mittel

Kontrolle (und Bewertung)

Die Schülerinnen und Schüler ...

- ... können das arithmetische Mittel einer Messreihe berechnen.
- ... können erklären, wofür man das arithmetische Mittel benötigt.

- ▶ Fasse zusammen, was wir heute neues gelernt haben.
- ▶ Wofür benötigt man das arithmetische Mittel?
- ▶ Erkläre, wie man das arithmetische Mittel berechnet.

Arithmetisches Mittel

Motivierung & Zielbildung

5'

Diskussion des Einstiegsbeispiels und Zielformulierung für Stunde

Weitsprung von Luca und Alex

Stoffvermittlung

20'

**Erkundungsauftrag und Handlungen
am Beispiel (Partnerarbeit)**



**Verallgemeinerung und Erarbeiten
der Berechnungsvorschrift (Plenum)**

1. addiere alles, 2. teile durch Anzahl

**Erstaneignung (Plenum und
Partnerarbeit)**

Beispiel, Realisieren, Fehlerfinden

Festigung

17'

**Vielfältiges Üben mit differenzierenden
Aufgaben (Einzel- und ggf. Partnerarbeit)**

Kontrolle (und Bewertung)

3'

**mündl. Zusammenfassung der Stunde,
Bezugnahme zum Lernziel**

Arithmetisches Mittel

Stoffvermittlung

Festigung

Erkundungsauftrag
und Handlungen am
Beispiel

Verallgemeinerung und Erarbeiten
der Berechnungsvorschrift;
Erstaneignung

Vielfältiges Üben mit
differenzierenden Aufgaben

Verallgemeinerung der
Lernhandlungen
erste Lernhandlungen

ggf. Bildung von Orientierungshilfen
oder Nutzung von Arbeitsmitteln

Nutzung der Orientierungshilfen;
ggf. Präzisierung der Abstraktion

Ausgangskonkretum

Ausgangsabstraktum

Konkretisierungsreihen

charakteristisches Beispiel, an dem in
besonderer Weise das Wesen des
Begriffs hervorgehoben werden kann

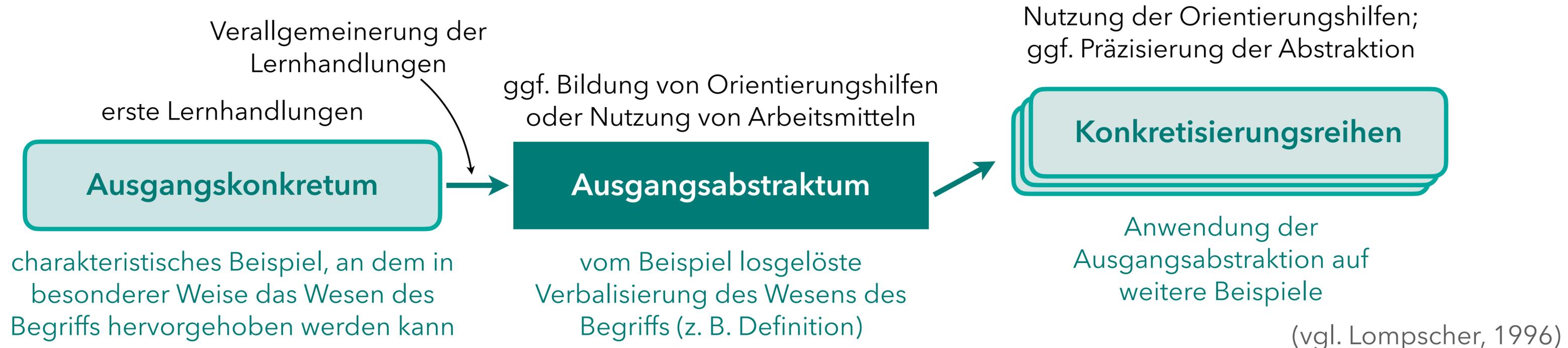
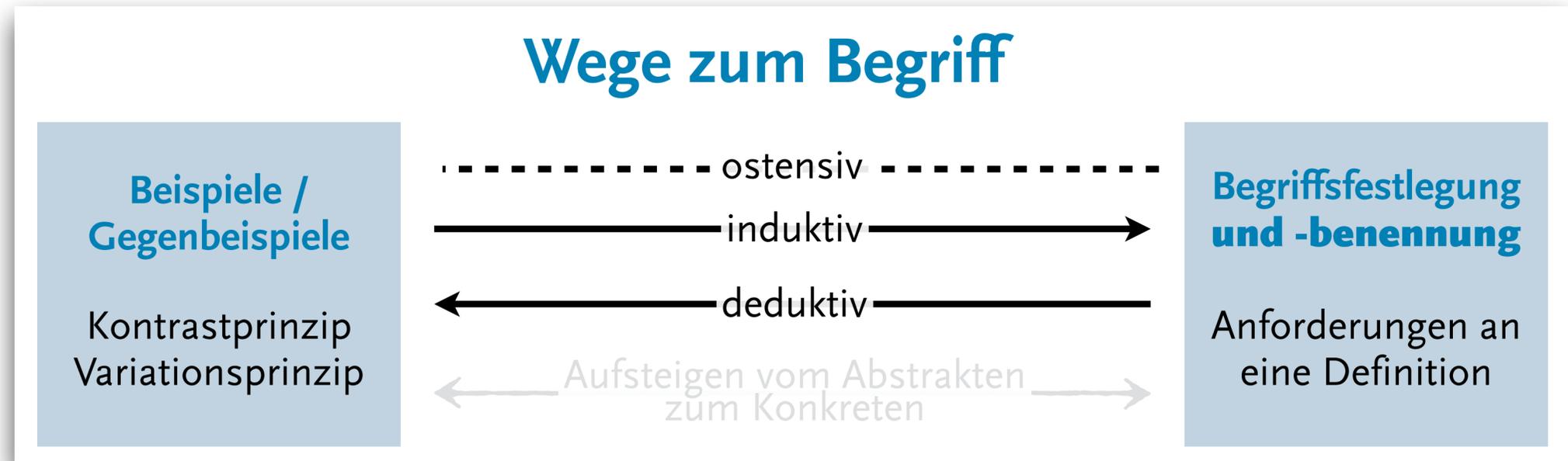
vom Beispiel losgelöste
Verbalisierung des Wesens des
Begriffs (z. B. Definition)

Anwendung der
Ausgangsabstraktion auf
weitere Beispiele

Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten

Vorteile

- ziemlich effektiv (man kann schnell mit Definition arbeiten)
- umgeht »Ostereiersuchen« bei induktiver Begriffsbildung



Literatur

- Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Potsdam*, 35(2), 129-134.
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>
- Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130-143). Cornelsen. https://home.ph-freiburg.de/leudersfr/preprint/2009_leuders_intelligent_ueben_mathemagische_momente.pdf
- Lompscher, J. (1996, 15.09). Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten–Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung. Übersetzung eines Referats auf dem Symposium "Die ZdnE: Beziehungen zwischen Erziehung und Entwicklung" im Rahmen der 2. Internationalen Konferenz zur soziokulturellen Forschung, Genf. <https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/444/file/AUFSTEIG.pdf>