Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

# Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 9 – Begriffe, Sachverhalte und Verfahren

# Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 9 – Begriffe, Sachverhalte und Verfahren

- Sie kennen prinzipielle Möglichkeiten, Begriffe, Sachverhalte und Verfahren einzuführen, Aneignungsprozesse mithilfe von Orientierungshilfen zu gestalten und die Inhalte zu festigen.
- Sie erkennen Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den typischen Vorgehensweisen für Begriffe, Sachverhalte und Verfahren.
- Sie können die Prozesse tätigkeitstheoretisch einordnen.

# Gestaltung des Lernprozesses

| | |
|---|---|
| Motivierung & Zielbildung | Anforderungssituation in der **Zone der nächsten Entwicklung**; **Lernzielbildung** |
| Sicherung des Ausgangsniveaus | explizites und implizites **Reaktivieren** von Kenntnissen und Fähigkeiten |
| | **Begriffe** · **Sachverhalte/ Zusammenhänge** · **Verfahren** |
| Stoffvermittlung | Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen** schaffen und **Aneignungshandlungen etappenweise verinnerlichen** |
| Festigung | vielfältiges **Üben** & komplexes **Anwenden** |
| Kontrolle (und Bewertung) | **Abgleich** zwischen Handlungsverlauf, Handlungsergebnis und Lernziel |

(Bruder, 1991)

# Fazit

## Begriffsverständnis

Bezeichner, Bezeichneter

Begriffsinhalt, Begriffsumfang, Begriffsnetz

## Wege zum Begriff

**Beispiele / Gegenbeispiele**

Kontrastprinzip
Variationsprinzip

ostensiv

induktiv →

← deduktiv

↔ Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten

**Begriffsfestlegung und -benennung**

Anforderungen an eine Definition

360

| | Identifizieren | Realisieren |
|---|---|---|
| **Orientierungshilfe** | • System der Merkmale des Begriffs<br>• Schrittfolge zum Prüfen der Merkmale | • Handlungsvorschrift zum Herstellen oder Vervollständigen des Objekts |
| **materielle/ materialisierte Handlung** | Überprüfung der Merkmale an gegebenen Objekten oder an Modellen (Zeichnungen, Diagramme); Orientierungshilfe liegt schriftlich vor | Beim Lösen entsprechender Aufgaben orientieren sich Schülerinnen und Schüler am Text der Handlungsvorschrift, die schriftlich vorliegt. |
| **sprachliche Handlung** | sprachliches Begründen des Zutreffens oder Nichtzutreffens der einzelnen Merkmale (unter zunehmender Zurückdrängung der Orientierungshilfe) | Kommentieren des Lösungsweges beim Ausführen der Handlungsschritte (Handlungsvorschrift liegt nicht mehr vor) |
| **geistige Handlung** | sofortiges Entscheiden, ob der Begriff zutrifft oder nicht (ohne Benutzung der Orientierungshilfe) | selbstständiges Lösen entsprechender Aufgaben (ohne Verwendung der Handlungsvorschrift) |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 46)

1 Inhalt erarbeiten / **Begriff bilden**

2 Orientierungshilfen und Aneignungshandlungen

3 vielfältiges Üben & komplexes Anwenden

**Begriffe** | Sachverhalte/ Zusammenhänge | Verfahren

| | |
|---|---|
| **Verwendung von Spezial- und Extremfällen** | • Unterbegriffe<br>• Grenzfall |
| **Umformulieren** | • verschiedene Definitionsarten<br>• Def. in Merkmalsystem verwandeln |
| **Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen** | • Merkmale nicht an feste Variablensymbole binden |
| **Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen** | • Oberbegriffe<br>• Einordnung in Begriffssystem |
| **Bedingungen variieren** | • Merkmalsvariation durch Weglassen bzw. Hinzufügen von Merkmalen, Ändern der log. Verknüpfung |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

# Sachverhalt finden

- induktiv über das Entdecken von Merkmalen in gegebenen Situationen
- aus dem Widerspruch zu einer angenommenen Hypothese
- deduktiv aus bisherigen Sachverhalten

**Innenwinkelsatz bei Dreiecken**

Winkel in Dreiecken messen, Summen bilden, Ergebnisse vergleichen

**Umkehrung des Satz des Thales**

rechte Winkel erzeugen, Punkte »stempeln«, Lage beobachten

**Nebenwinkelsatz**

Annahme aufgrund von Erkundungen: »Nebenwinkel sind nie gleich groß«

**Kosinussatz**

Zerlegung eines allgemeinen Dreiecks in rechtwinkl. Dreiecke, Anwendung des Satzes des Pythagoras

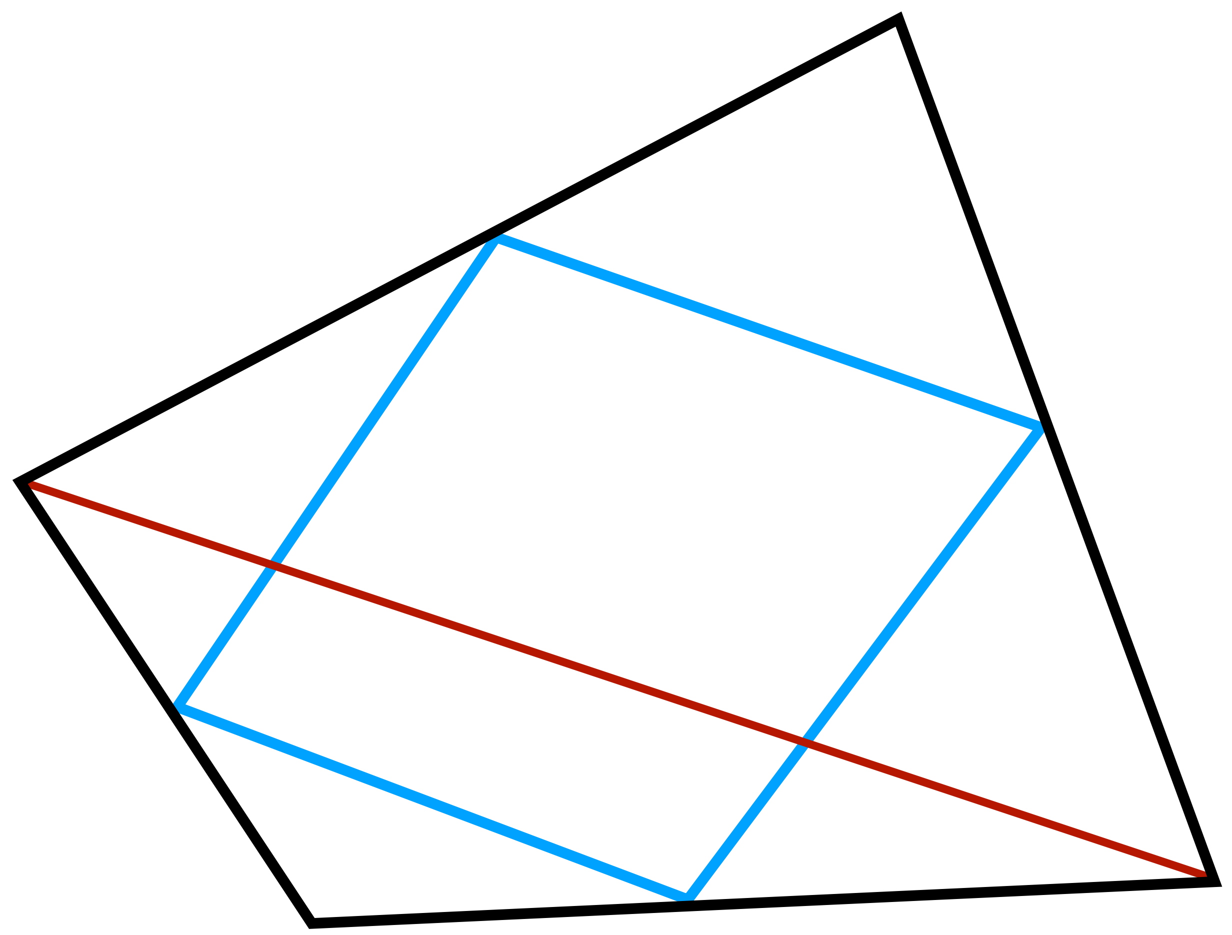
**p-q-Formel**

Herleitung über quadratische Ergänzung

(Vollrath & Roth, 2012, S. 247 f.)

# Begründung finden

Das »Mittenviereck«



- über heuristische Strategien (z. B. Vorwärts-/Rückwärtsarbeiten, Analogieschlüsse)
- heuristische Hilfsmittel (z. B. informative Figuren; Einzeichnen von Hilfslinien)
- Nutzung von Zusammenstellungen wichtiger Sachverhalte und Definitionen

| **Vierecksart** | **definierende Eigenschaft** |
|---|---|
| **Quadrat** | alle Seiten gleich lang, vier rechte Winkel |
| **Rechteck** | gegenüberliegende Seiten gleich lang, vier rechte Winkel |
| **Parallelogramm** | gegenüberliegende Seiten parallel zueinander |
| **Raute** | alle Seiten gleich lang |

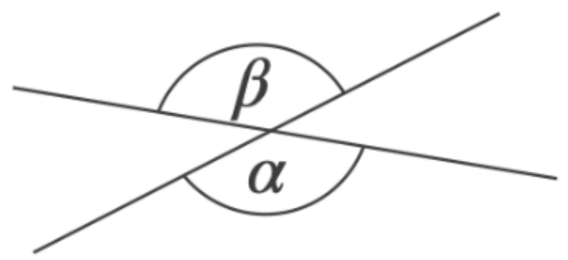
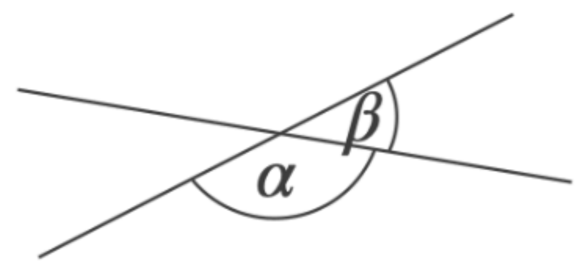
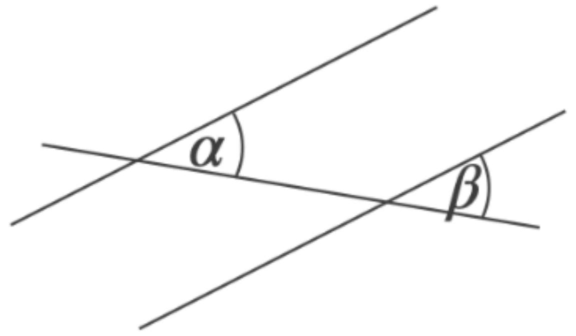
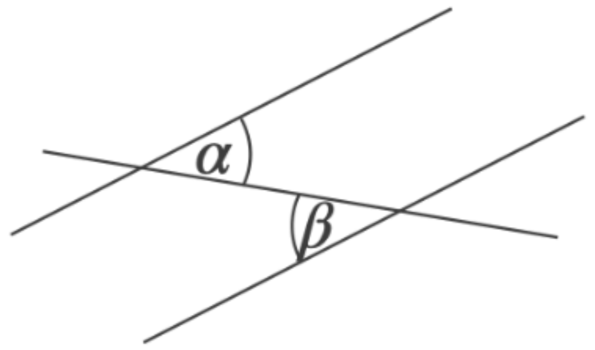
(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

## Erkennen der inneren Struktur d. Sachverhalts

(Prüfen der Voraussetzungen, Angeben von Beispielen, Herausarbeiten von Voraussetzung und Behauptung)

---

**strukturierter Wissensspeicher:**
Tabelle, bestehend aus Bezeichnung, Voraussetzung, Behauptung und Visualisierung des Sachverhalts

| Name des Satzes | Voraussetzung | Skizze | Behauptung |
|---|---|---|---|
| Scheitelwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind ein Scheitelwinkelpaar. |  | $\alpha = \beta$ |
| Nebenwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind ein Nebenwinkelpaar. |  | $\alpha + \beta = 180^\circ$ |
| Stufenwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen. |  | $\alpha = \beta$ |
| Wechselwinkelsatz | $\alpha$ und $\beta$ sind Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen. |  | $\alpha = \beta$ |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

## Erkennen der inneren Struktur d. Sachverhalts

(Prüfen der Voraussetzungen, Angeben von Beispielen, Herausarbeiten von Voraussetzung und Behauptung)

---

**strukturierter Wissensspeicher:**
Tabelle, bestehend aus Bezeichnung, Voraussetzung, Behauptung und Visualisierung des Sachverhalts

**strukturbetonende Realisierungsmöglichkeit:**
Darstellung des Sachverhalts als Ausfüllhilfe mithilfe von Platzhaltern (v. a. bei algebraischen Zusammenhängen)

**1** Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

$$\left(\boxed{-\frac{3}{4}l}\right)\cdot\left(\boxed{4l}-\boxed{12}\right)$$

$$\square\cdot(\square-\square)=\square\cdot\square-\square\cdot\square$$

(Steinhöfel et al., 1988, S. 67 ff.)

(Adam & Kleine, 2016, S. 51)

## Beweisfindung

(v. a. bei direkten Beweisen)

**Handlungsvorschrift:**

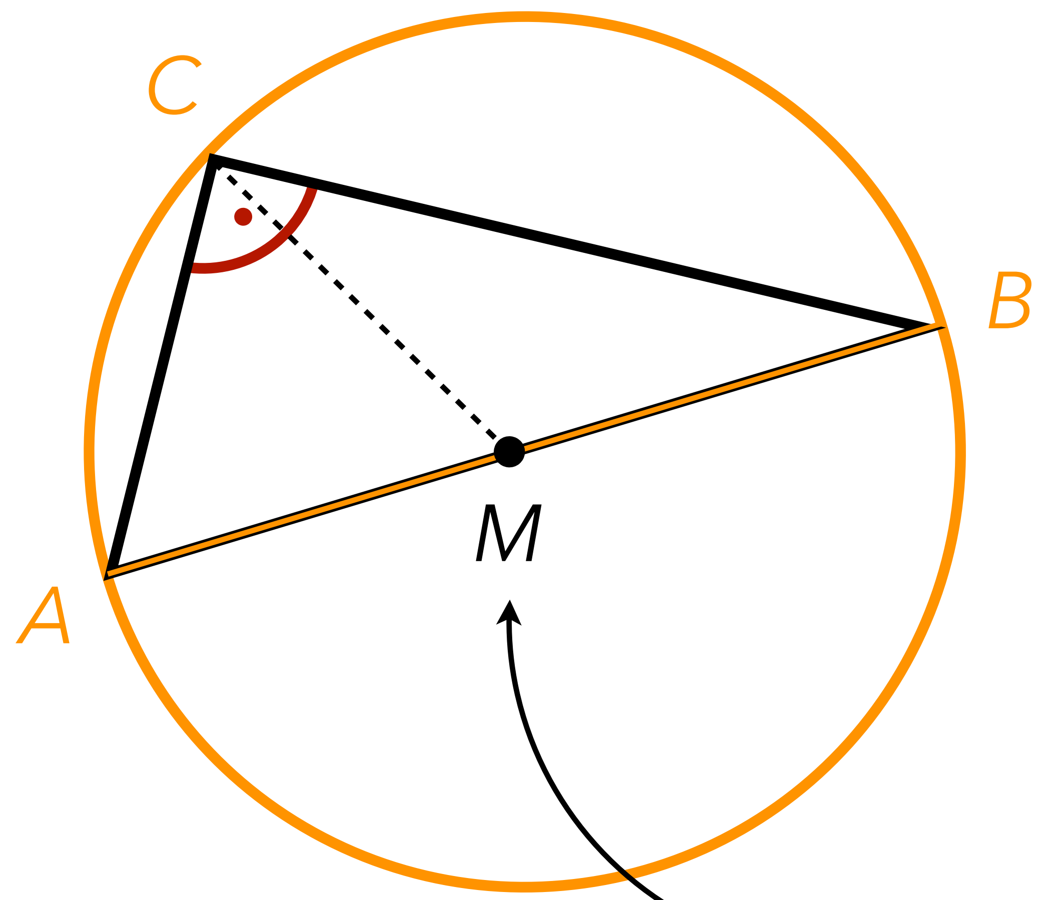
1. Formulieren des Satzes als **Wenn-dann-Aussage**
2. Feststellen von Voraussetzung und Behauptung
3. Erstellen einer **Überlegungsfigur**, Bezeichnung wichtiger Teile sowie der Voraussetzung und Behauptung
4. **Überlegung, woraus die Behauptung folgen** kann. Dabei Verwendung der Überlegungsfigur sowie Orientierung an
    - Definitionen vorkommender Begriffe
    - Sätzen mit gleicher Behauptung
    - Sätzen mit ähnlicher Behauptung
5. Abwägung, welcher Satz bzw. welche Definition geeignet ist
6. **Nachweis der Behauptung** aus den bei 5. gewählten Beweismitteln

(Steinhöfel et al., 1988, S. 72)

## Satz des Thales

**Wenn** C auf einem Kreis mit Durchmesser *AB* liegt, **dann** gilt für das Dreieck *ABC*: $\gamma = 90°$.

*andere Sätze mit Aussagen über Winkel in Dreiecken?*

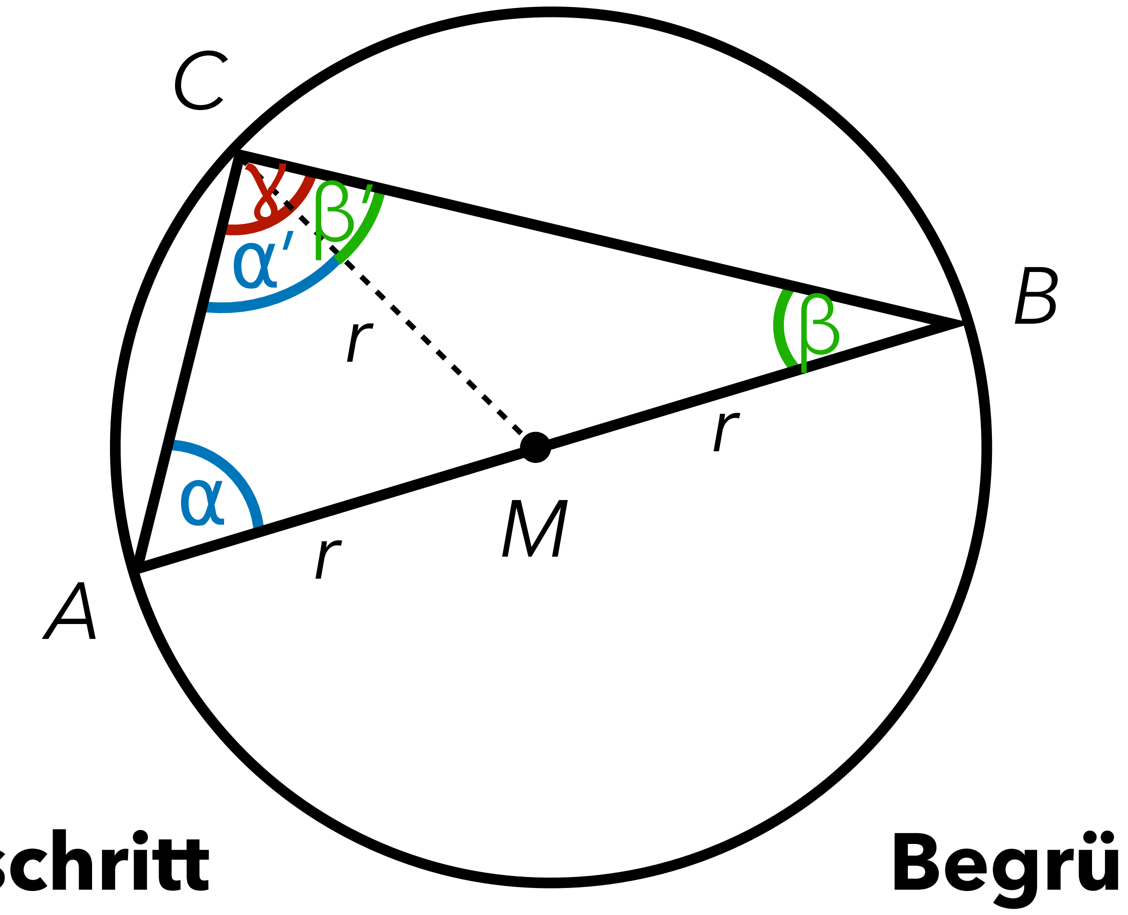



*M muss in irgendeiner Form relevant für den Beweis sein!*

## Beweisdarstellung

**Beweisschema:**

Tabelle, bestehend aus Beweisschritt und Begründung




| | **Beweisschritt** | **Begründung** |
|---|---|---|
| (1) | $AM = MB = MC$, $\gamma = \alpha' + \beta'$ | $AB$ Durchmesser, $C$ auf Kreis, Zerlegung von $\Delta ABC$ mit Radius |
| (2) | $\alpha = \alpha'$ | $\Delta AMC$ gleichschenklig nach (1) |
| (3) | $\beta = \beta'$ | $\Delta BMC$ gleichschenklig nach (1) |
| (4) | $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 180°$ | Innenwinkelsumme in $\Delta ABC$ |
| (5) | $2\alpha' + 2\beta' = 180°$ | (4) mit (2) und (3) |
| (6) | $\alpha' + \beta' = 90°$ | Umformung von (5) |
| (7) | $\gamma = 90°$ | (1) und (6) |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 73)

| | |
|---|---|
| **Verwendung von Spezial- und Extremfällen** | • Einschränkung einer oder mehrerer Voraussetzungen<br>• Fallunterscheidungen |
| **Umformulieren** | • verschiedene logisch gleichwertige Formulierungen |
| **Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen** | • Voraussetzungen und Behauptungen nicht an feste Symbole binden |
| **Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen** | • Sätze mit gleicher Behauptung<br>• Sätze mit ähnlicher Behauptung |
| **Umkehrungen bilden** | • Voraussetzungen und Behauptungen vertauschen |
| **Bedingungen variieren** | • Weglassen bzw. Hinzufügen von Voraussetzungen |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

Verfahren als Routine, eine Klasse von Problemen zu lösen ~~Kreativität~~ Disziplin

(Vollrath & Roth, 2012, 262 f.)

**Ansatz zum Gewinnen eines Verfahrens:**

Reflektierende Betrachtung der Lösung spezifischer Probleme derselben Problemklasse

- Was haben all die betrachteten Probleme gemeinsam?
- Welche Schritte haben wir jeweils durchgeführt, um das Problem zu lösen?
- Wozu haben wir die Schritte durchgeführt?
- Warum war es möglich, die Schritte durchzuführen?

**Intervallschachtelung zum näherungsweisen Bestimmen einer Wurzel**

- Was haben all die betrachteten Probleme gemeinsam?
- Welche Schritte haben wir jeweils durchgeführt, um das Problem zu lösen?
- Wozu haben wir die Schritte durchgeführt?
- Warum war es möglich, die Schritte durchzuführen?

$$\sqrt{5}$$

$$2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$2{,}1^2 = 4{,}41 \qquad 2{,}2^2 = 4{,}84 \qquad 2{,}3^2 = 5{,}29$$

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

Gesucht ist eine Näherung für $\sqrt{n}$.

1. Finde natürliche Zahlen $a_1, b_1$ mit $a_1^2 < n < b_1^2$.
2. Finde $a_2, b_2$ mit einer Dezimalstelle, sodass $a_1 < a_2, b_2 < b_1$ und $a_2^2 < n < b_2^2$.
3. Wiederhole den letzten Schritt jeweils mit einer weiteren Dezimalstelle bis zur gewünschten Anzahl $k$ an Dezimalstellen. Du erhältst $a_k^2 < n < b_k^2$.
4. $a_k$ bzw. $b_k$ sind Näherungen für $\sqrt{n}$.

**Intervallschachtelung zum näherungsweisen Bestimmen einer Wurzel**

$$\sqrt{5}$$

$$2^2 = 4 \qquad 3^2 = 9$$

$$2 < \sqrt{5} < 3$$

$$2{,}1^2 = 4{,}41 \qquad 2{,}2^2 = 4{,}84 \qquad 2{,}3^2 = 5{,}29$$

$$2{,}2 < \sqrt{5} < 2{,}3$$

| | |
|---|---|
| **Orientierungshilfe** | schriftliche Fixierung des Verfahrensablaufs – als Wortvorschrift, als Flussdiagramm bzw. als Graph o. Ä. |
| **materielle/materialisierte Handlung** | Verfahrensablauf liegt in schriftlicher Form vor. |
| **sprachliche Handlung** | Verfahrensablauf liegt nicht mehr schriftlich vor. Die einzelnen Schritte werden von den Schülerinnen und Schülern während der Ausführung kommentiert. |
| **geistige Handlung** | Die Schülerinnen und Schüler führen das Verfahren selbstständig und ohne schriftlich vorliegenden Verfahrensablauf aus. |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 118)

| | |
|---|---|
| **Verwendung von Spezial- und Extremfällen** | • Spezialisierung von Operanden (Fallunterscheidungen) |
| **Umformulieren** | • evtl. unterschiedliche Reihenfolge der Operationen |
| **Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen** | • unterschiedliche Formalisierungen (Blockschema, Wortvorschrift, Graph, …) |
| **Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen** | • Unteralgorithmen<br>• Oberalgorithmen |
| **Umkehrungen bilden** | • Umkehroperationen bilden |
| **Bedingungen variieren** | • unterschiedliche Variablengrundbereiche |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

# Gestaltung des Lernprozesses

| Festigung | Begriffe | Sachverhalte/ Zusammenhänge | Verfahren |
|---|---|---|---|
| **Verwendung von Spezial- und Extremfällen** | • Unterbegriffe<br>• Grenzfall | • Einschränkung einer oder mehrerer Voraussetzungen<br>• Fallunterscheidungen | • Spezialisierung von Operanden (Fallunterscheidungen) |
| **Umformulieren** | • verschiedene Definitionsarten<br>• Def. in Merkmalsystem verwandeln | • verschiedene logisch gleichwertige Formulierungen | • evtl. unterschiedliche Reihenfolge der Operationen |
| **Verwendung unterschiedl. Bezeichnungen** | • Merkmale nicht an feste Variablensymbole binden | • Voraussetzungen und Behauptungen nicht an feste Symbole binden | • unterschiedliche Formalisierungen (Blockschema, Wortvorschrift, Graph, …) |
| **Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen** | • Oberbegriffe<br>• Einordnung in Begriffssystem | • Sätze mit gleicher Behauptung<br>• Sätze mit ähnlicher Behauptung | • Unteralgorithmen<br>• Oberalgorithmen |
| **Umkehrungen bilden** | | • Voraussetzungen und Behauptungen vertauschen | • Umkehroperationen bilden |
| **Bedingungen variieren** | • Merkmalsvariation durch Weglassen bzw. Hinzufügen von Merkmalen, Ändern der log. Verknüpfung | • Weglassen bzw. Hinzufügen von Voraussetzungen | • unterschiedliche Variablengrundbereiche |

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)

# Literatur


Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Potsdam*, *35*(2), 129–134.

Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 8, Berlin/Brandenburg* (1. Auflage). C.C.Buchner.

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4

Steinhöfel, W., Reichold, K., & Frenzel, L. (1988). *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht*. Ministerium für Volksbildung.