

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

# **Stoffdidaktik Mathematik**

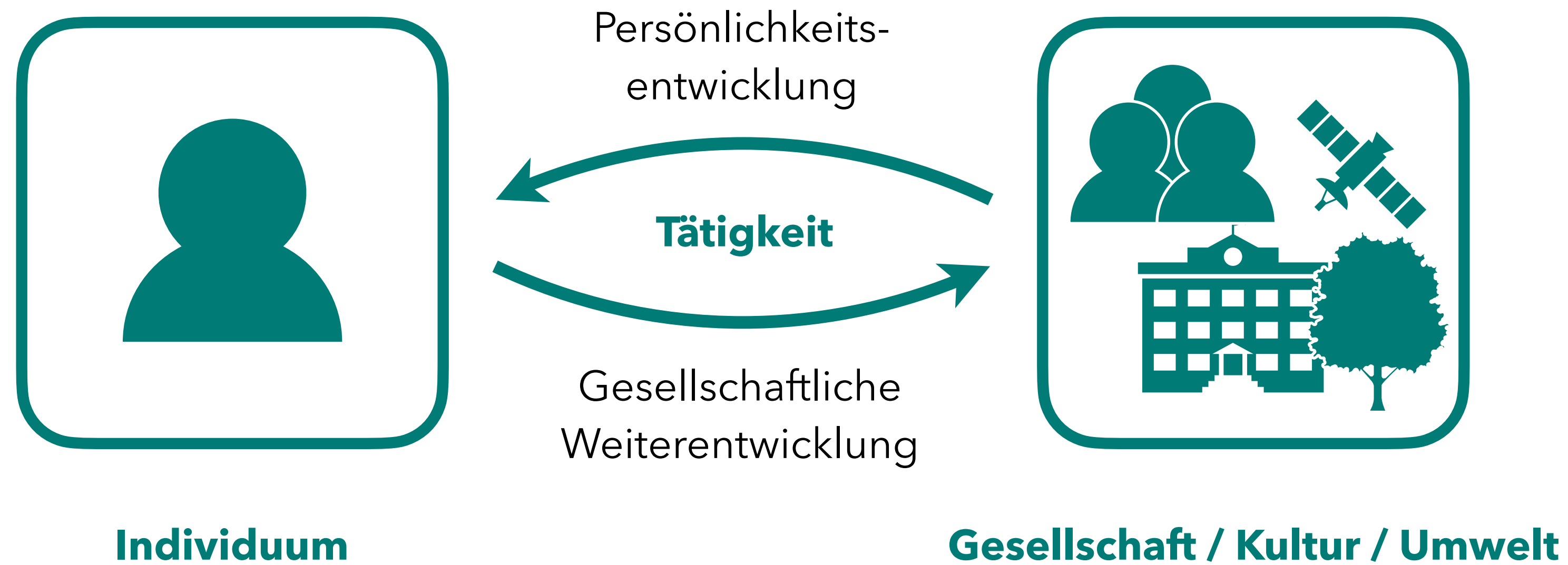
Kapitel 8 – Tätigkeitstheorie und Lernen

# Stoffdidaktik Mathematik

## Kapitel 8 – Tätigkeitstheorie und Lernen

- Sie kennen Grundideen der Tätigkeitstheorie, insbesondere bezüglich Lehr-Lern-Prozesse.
- Sie könnten den Zusammenhang zwischen lernpsychologischen Hintergründen und der Phasenstruktur von Unterricht nachvollziehen.
- Sie können die Notwendigkeit von Orientierungshilfen begründen und die etappenweise Ausbildung geistiger Handlungen beschreiben.

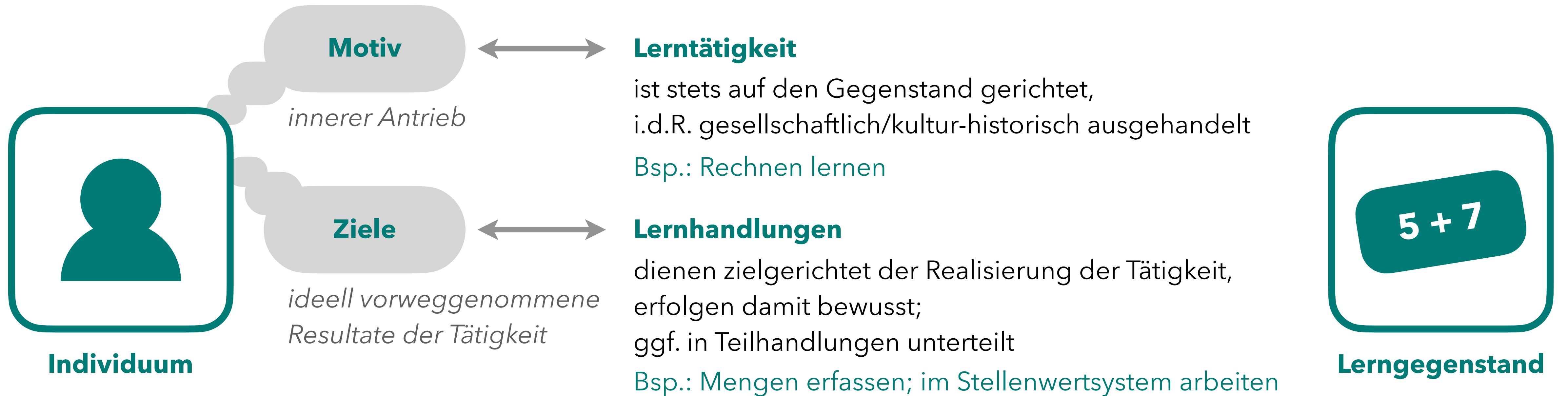
# Lernpsychologische Hintergründe



Der Mensch »erschafft [...] seine Kultur und zugleich die psychischen Funktionen, die ihn dazu in die Lage versetzen.«

(Giest & Lompscher, 2006, S. 27)

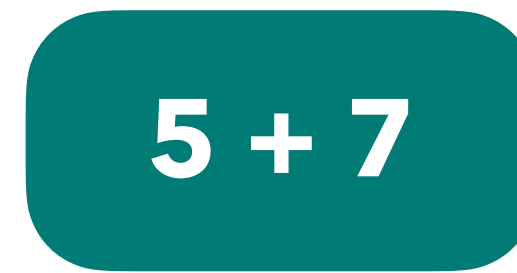
# Lernpsychologische Hintergründe



**Lernhandlungen** sind relativ geschlossene und abgrenzbare, zeitlich und logisch strukturierte **Abschnitte im Verlauf der Lerntätigkeit, die ein konkretes Lernziel realisieren**, durch bestimmte Lernmotive angetrieben werden und entsprechend den konkreten Lernbedingungen durch den Einsatz äußerer und verinnerlichter Lernmittel in einer jeweils spezifischen Folge von Teilhandlungen vollzogen werden.

(Lompscher, 1985b, S. 52)

# Lernpsychologische Hintergründe



Rechnen lernen

Mengen erfassen; im Stellenwertsystem arbeiten



räumliche Orientierung gewinnen

*Architekt/-in spielen*

Würfel positionieren, Würfelbauwerk erstellen



Informationen strukturieren

Daten erfassen, Daten klassifizieren, Diagramme zeichnen

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- **Identifizieren**
- Realisieren

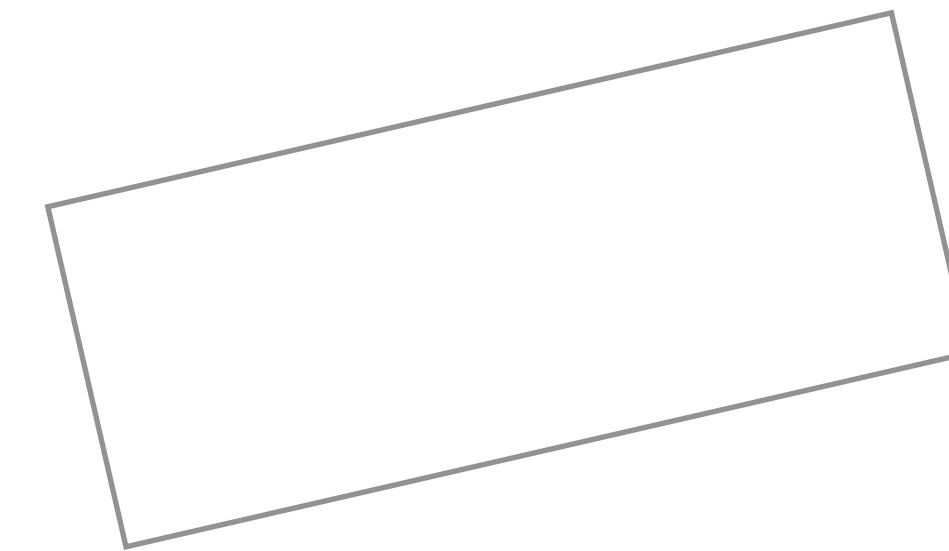
### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Entscheiden, ob es sich um ein Rechteck handelt



Einkreisen aller Stammbrüche

$$\frac{2}{5} \quad \frac{1}{8} \quad 0,23 \quad 1\frac{2}{7} \quad \frac{1}{50}$$

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- **Realisieren**

### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Zeichnen eines Quadrats mit  
der Seitenlänge  $a = 5 \text{ cm}$

Angeben der Ergebnismenge  
eines Würfelwurfes



# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

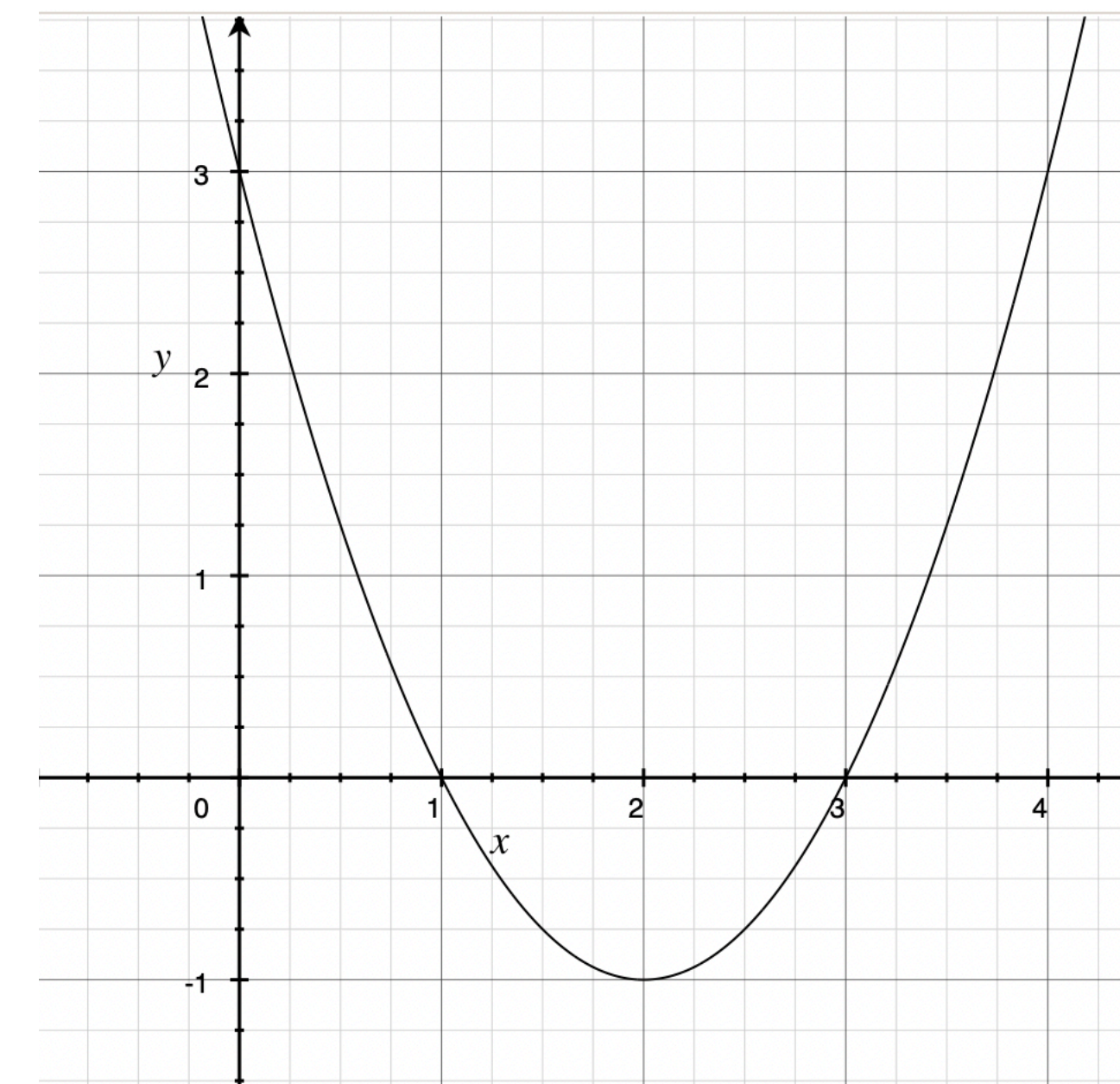
### Grundhandlungen

- **Erkennen**
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Ermitteln der Nullstellen  
aus dem Funktionsgraphen





# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

### Grundhandlungen

- Erkennen
- **Beschreiben**
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Beschreiben, wie ein Kreis mit dem Radius  $r = 3$  cm gezeichnet wird

Beschreiben der Vorgehensweise beim Bestimmen der Nullstellen

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

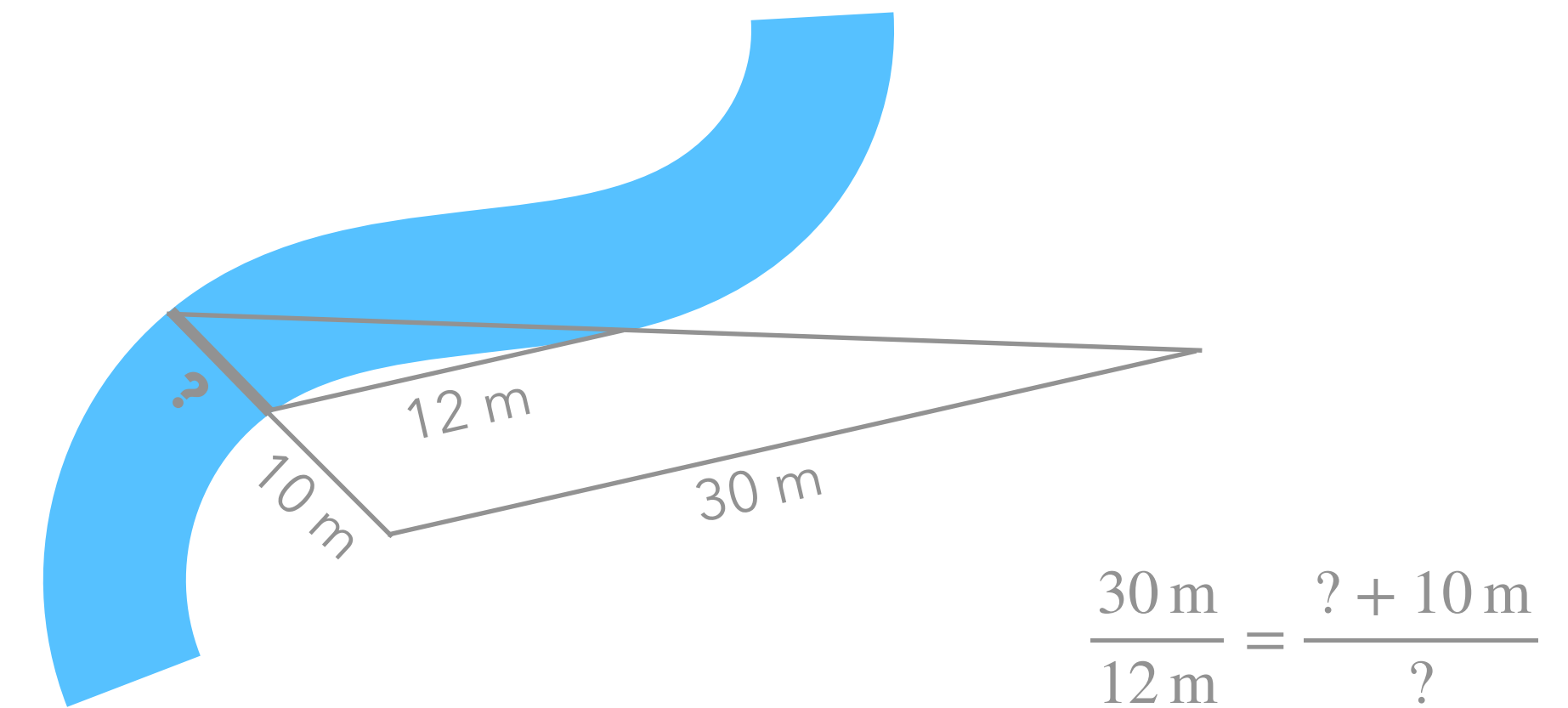
### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- **Verknüpfen**
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

*Bestimme die Flussbreite.*



Verwenden von Strahlensatzfigur  
und Termumformungen zum  
Lösen der Aufgabe

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- **Anwenden**
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Lösen des Gleichungssystems  
mit dem Einsetzungsverfahren

$$\begin{cases} 2x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Berechnen von  $2,75 \cdot 3,1$

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

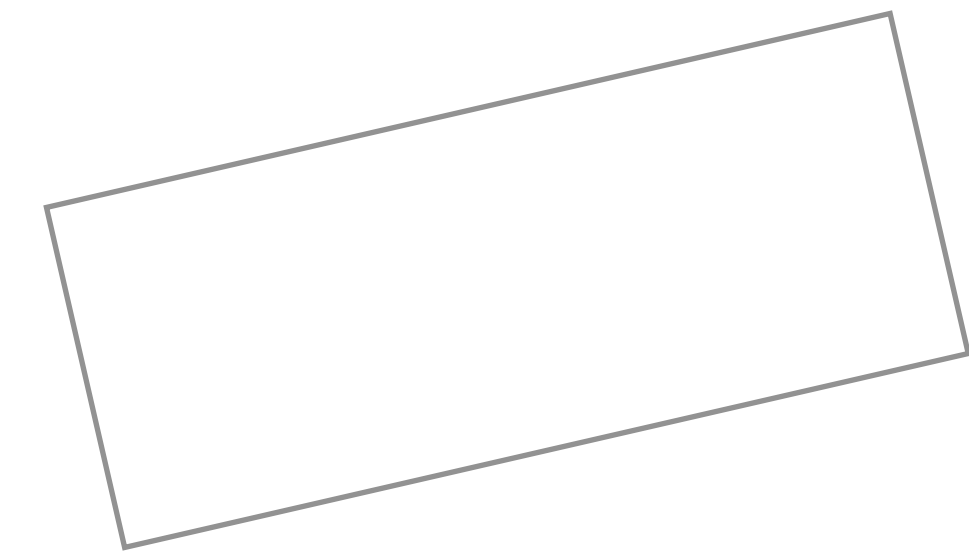
### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- **Begründen**

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Begründen, warum es sich um ein Rechteck handelt



Begründen, warum die Summe von drei aufeinanderfolgenden Zahlen wieder durch 3 teilbar ist

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- **Suchen**
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

*Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?*

Suchen des Lösungsansatzes,  
die Situation geometrisch zu  
modellieren

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- **Planen**
- Ausführen
- Kontrollieren

*Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?*

1. Modellieren des Raums als Quader und der Luftballons als Kugeln
2. Schätzen/Messen der Größen
3. Nutzen der Volumenformeln
4. Inbeziehungsetzen der Volumina



# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- **Ausführen**
- Kontrollieren

*Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?*

Handlungsvollzug des Plans

# Lernpsychologische Hintergründe

## Typische Lernhandlungen im Mathematikunterricht

(Bruder & Brückner, 1989)

### Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

### Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

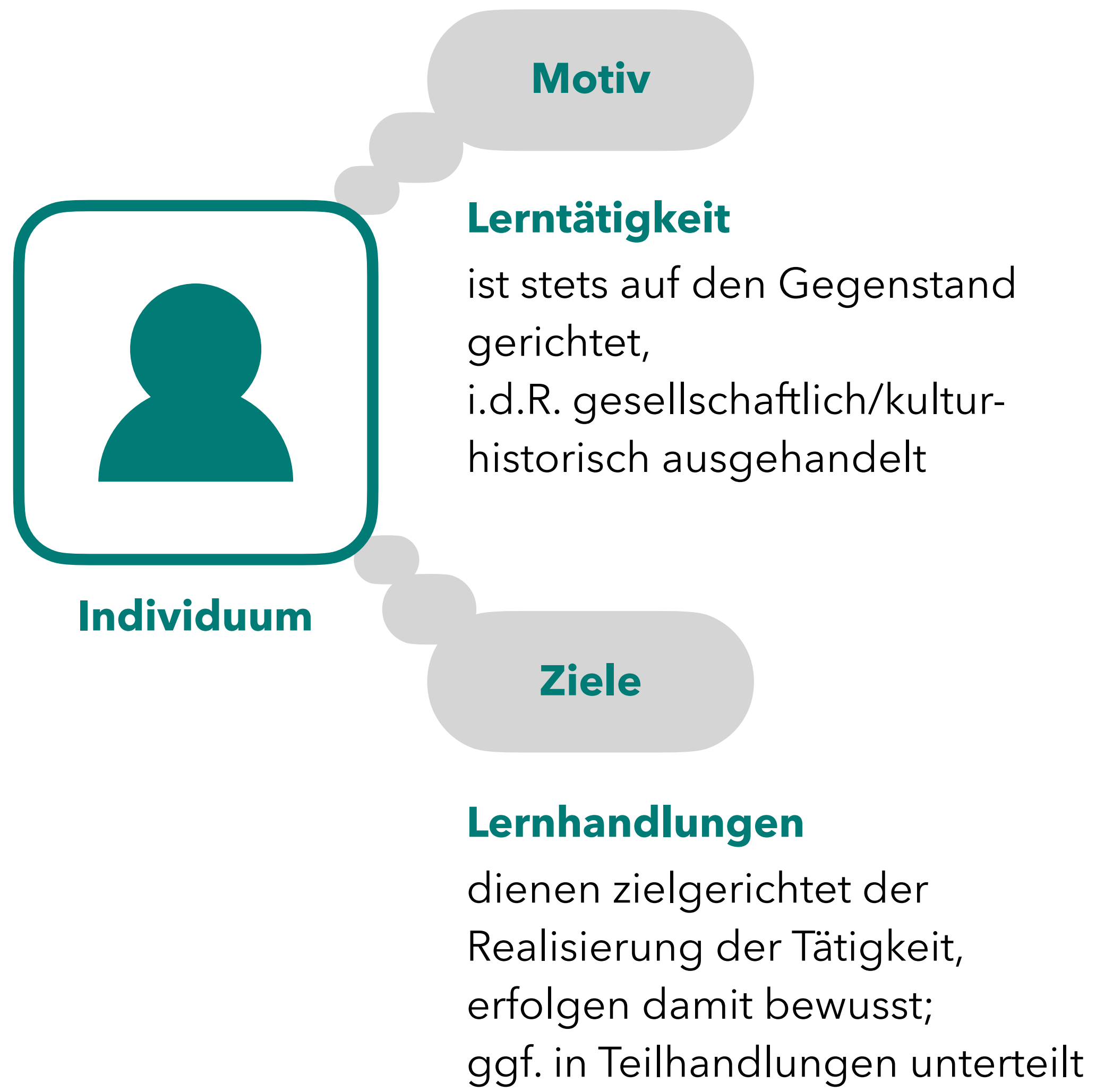
### Komplexe Handlungen

- Suchen
- Planen
- Ausführen
- **Kontrollieren**

*Wie viele Luftballons passen in diesen Raum?*

Validieren des Ergebnisses;  
ggf. Entscheidung zu weiterem  
Durchgang des Modellierungs-  
kreislaufes

# Lernpsychologische Hintergründe



Es braucht eine **Motivierung**, um einen *inneren Antrieb* für den folgenden Lernprozess zu schaffen.

Es braucht eine **Zielbildung**, um das *potenzielle Ergebnis* des folgenden Lernprozesses im Blick zu haben.

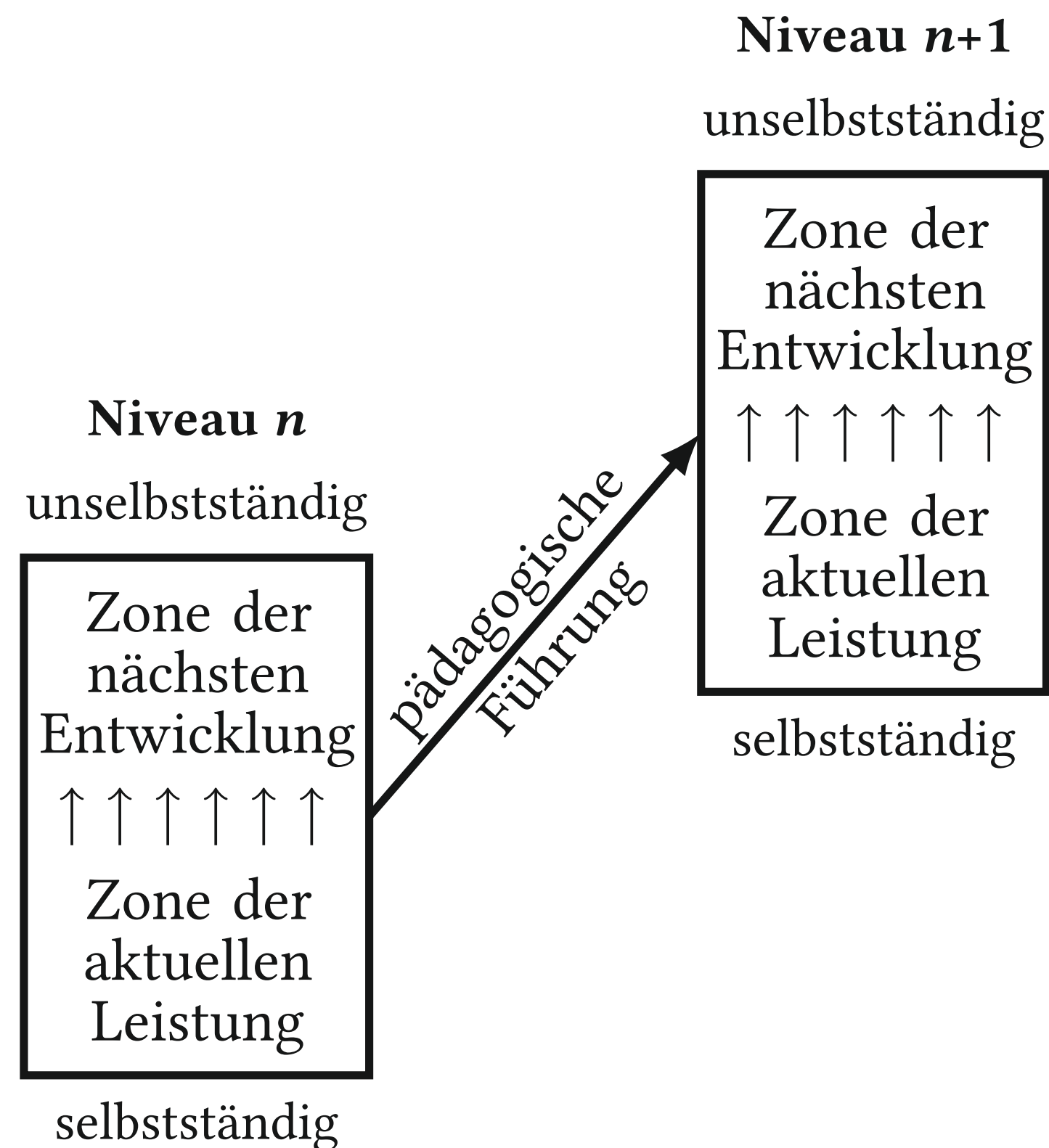
*Es braucht aber noch mehr ...*

# Gestaltung des Lernprozess

## Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der  
**Zone der nächsten Entwicklung**

Problemsituation, Aufgabe oder Fragestellung, die ein Kind zwar mithilfe seiner bisherigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten verstehen und nachvollziehen kann, zu ihrer Lösung es jedoch noch **nicht selbstständig** in der Lage ist.



(nach Lompscher, 1985a)

# Gestaltung des Lernprozess

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der  
**Zone der nächsten Entwicklung**

**Lernziel  $\neq$  Lehrziel**

## Lernzielbildung

**individuelle (!)** Zielbildung hinsichtlich  
des zu erzielenden Ergebnisses

Die Qualität der Lernhandlungen hängt ab  
vom Grad der **Bewusstheit, Allgemeinheit** und  
**Differenziertheit** des Lernziels.

# Gestaltung des Lernprozess

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der  
**Zone der nächsten Entwicklung**  
**Lernzielbildung**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren**  
von Kenntnissen und Fähigkeiten

**unbenotet!**



# Gestaltung des Lernprozess

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der  
**Zone der nächsten Entwicklung**  
**Lernzielbildung**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren**  
von Kenntnissen und Fähigkeiten

Stoffvermittlung

Erarbeitung & (Erst-)Aneignung

Begriffe

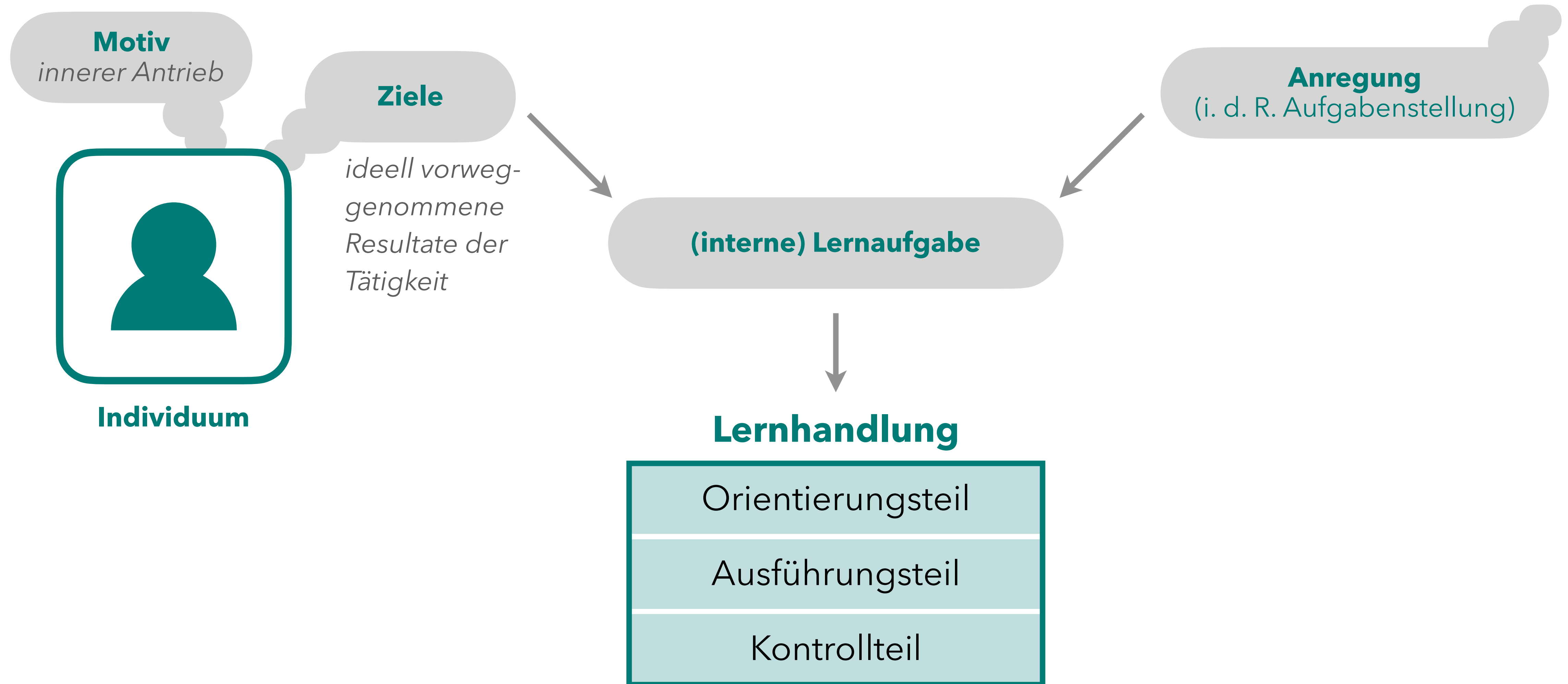
Sachverhalte/  
Zusammenhänge

Verfahren

Festigung

Lernhandlungen

# Lernpsychologische Hintergründe



# Lernpsychologische Hintergründe

Orientierungsteil der **Lernhandlung**

## I) Probierorientierung

- Fehlen der nötigen Kenntnisse, Fähigkeiten oder Fertigkeiten
- Vorgehen nach Versuch und Irrtum
- Fehlende Einsicht, warum eine bestimmte Handlung zum Erfolg geführt hat, eine andere jedoch nicht
- erfolgreiche Handlung nicht immer reproduzierbar / kaum auf veränderte Situationen übertragbar
- derartige Orientierung höchstens zum Explorieren neuer Inhaltsbereiche wünschenswert

## II) Musterorientierung

## III) Feldorientierung

(Feldt-Caesar, 2017, S. 83 ff.)

# Lernpsychologische Hintergründe

Orientierungsteil der **Lernhandlung**

## I) Probierorientierung

## II) Musterorientierung

- Orientierung an bereits erfolgreich durchgeführten Handlungen in ähnlichen Anforderungssituationen
- nur erfolgreich, wenn Anforderungssituation erlerntem Muster ähnlich genug ist, um Passung zu ermöglichen
- Handlungsbedingungen des Musters müssen genau gekannt und stets geprüft werden
- Transferierbarkeit nicht immer gegeben, insb. bei fälschlicher Erkennung eines Musters

## III) Feldorientierung

(Feldt-Caesar, 2017, S. 83 ff.)

# Lernpsychologische Hintergründe

Orientierungsteil der **Lernhandlung**

## I) Probierorientierung

## II) Musterorientierung

## III) Feldorientierung

- nicht mehr an konkrete Anforderungssituation gebunden; Bezug auf ganze Anforderungsklasse
- Erkennen der Passung einer Anforderungsklasse führt zu Orientierung in konkreter Situation
- Überblick über die Situation und differenzierende Betrachtung, welche Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten weiterhelfen und welche nicht

(Feldt-Caesar, 2017, S. 83 ff.)

# Lernpsychologische Hintergründe

Orientierungsteil der **Lernhandlung**

## I) Probierorientierung

- Vorgehen nach Versuch und Irrtum
- erfolgreiche Handlung nicht immer reproduzierbar / kaum auf veränderte Situationen übertragbar

## II) Musterorientierung

- Orientierung an bereits erfolgreich durchgeführten Handlungen in ähnlichen Anforderungssituationen
- Transferierbarkeit nicht immer gegeben, insb. bei fälschlicher Erkennung eines Musters

## III) Feldorientierung

- Überblick über die Situation und differenzierende Betrachtung, welche Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten weiterhelfen und welche nicht

(Feldt-Caesar, 2017, S. 83 ff.)

Unterstützung durch  
**Orientierungshilfen**





# Lernpsychologische Hintergründe

## Ausführungsteil der Lernhandlung

Die Lernhandlung muss zunächst **beigebracht** werden (z. B. durch Vorführen), anschließend muss sie vom Lernenden durchgeführt und **angeeignet** werden, damit sie flexibel zur Verfügung steht – auch um komplexere Handlungen aufbauen zu können.

### Etappe der materiellen bzw. materialisierten Handlung

- Handlungen mit konkretem Material bzw. anhand von zur Verfügung stehenden Orientierungshilfen.

### Etappe der sprachlichen Handlung

- Handlungen werden ohne/mit geringer Zuhilfenahme des Materials durchgeführt und durch äußeres (oder inneres) Sprechen beschrieben.

### Etappe der geistigen Handlung

- Handlungen werden nun rein kognitiv durchgeführt.

#### 1. Etappe der materiellen bzw. materialisierten Handlung

#### 2. Etappe der sprachlichen Handlung

#### 3. Etappe der geistigen Handlung

#### Realisierung z.B. durch:

- Umgang mit Modellen, Schemata, Zeichnungen, realen Gegenständen u.ä. (bzw. Bau von Modellen, Anfertigen von Skizzen, ...)
- Verwendung von Symbolen
- Verwendung von Tabellen und Übersichten
- Kommentierendes Lösen unter zunehmender Zurückdrängung schriftlicher Orientierungsmaterialien
- Chorsprechen
- Schülervortrag
- Wiederholen von Merksätzen u.ä.
- Korrektur sprachlicher Äußerungen
- Stillarbeit (selbständiges Lösen von Aufgaben ohne detaillierte Anleitung, im Prinzip nur Ergebniskontrolle)
- mündliches oder schriftliches Formulieren von Antworten (evtl. Ausfüllen von Lückentexten).

(Steinhöfel et al., 1988, S. 19)

# Lernpsychologische Hintergründe

Kontrollteil der **Lernhandlung**



## Unterstützende Maßnahmen

- Lernziele explizit formulieren und auch festzuhalten > Abgleich mit Handlungsergebnissen besser möglich
- Anfertigen eines Lernprotokolls > eigenen Lernhandlungen dokumentier- und nachvollziehbar
- gegenseitige Kontrolle der Schülerinnen und Schüler > durch Verinnerlichung dieses Vorgehens später auch Selbstkontrolle

# Gestaltung des Lernprozess

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der  
**Zone der nächsten Entwicklung**  
**Lernzielbildung**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren**  
von Kenntnissen und Fähigkeiten

Stoffvermittlung

Begriffe

Sachverhalte/  
Zusammenhänge

Verfahren

- Erarbeiten des neuen Inhalts (Begriff, Sachverhalt oder Verfahren)
- Schaffen von Orientierungshilfen
- etappenweises Verinnerlichen von Aneignungshandlungen (Identifizieren und Realisieren)

# Gestaltung des Lernprozess

## Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der  
**Zone der nächsten Entwicklung**  
**Lernzielbildung**

## Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren**  
von Kenntnissen und Fähigkeiten

## Stoffvermittlung

Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen**  
schaffen und **Aneignungshandlungen**  
**etappenweise verinnerlichen**

## Festigung

- Verwendung von Spezial- und Extremfällen
- Umformulieren, Bedingungen variieren, Umkehrungen bilden
- Verwendung unterschiedlicher Bezeichnungen
- Bekanntes Neuem gegenüberstellen und Zusammenhänge erkennen lassen

(Steinhöfel et al., 1988, S. 34)



# Gestaltung des Lernprozess

## Was hat das mit unserem Vier-Ebenen-Ansatz zu tun?

Motivierung & Zielbildung

Anforderungssituation in der  
**Zone der nächsten Entwicklung**  
**Lernzielbildung**

**sinnstiftender  
Kontext**

**Kernideen in  
Vorschauperspektive**

Sicherung des Ausgangsniveaus

explizites und implizites **Reaktivieren**  
von Kenntnissen und Fähigkeiten

Stoffvermittlung

Inhalt erarbeiten, **Orientierungshilfen**  
schaffen und **Aneignungshandlungen**  
**etappenweise verinnerlichen**

**Explizitmachen  
Fundamentaler Ideen**

Festigung

vielfältiges **Üben** und komplexes  
**Anwenden** (vgl. auch Operatives  
Prinzip)

**Grundvorstellungen  
ausbilden**

Kontrolle (und Bewertung)

**Abgleich** zwischen Handlungsverlauf,  
Handlungsergebnis und Lernziel

**Kernideen in  
Rückschauperspektive**

(Bruder, 1991)

# Literatur

- Bruder, R. (1991). Unterrichtssituationen – ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Potsdam*, 35(2), 129–134.
- Bruder, R., & Brückner, A. (1989). Zur Beschreibung von Schülertätigkeiten im Mathematikunterricht – ein allgemeiner Ansatz. *Pädagogische Forschung. Wissenschaftliche Nachrichten*, 30(6), 72–82.
- Feldt-Caesar, N. (2017). Konzeptualisierung und Diagnose von mathematischem Grundwissen und Grundkönnen. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-17373-9>
- Giest, H., & Lompscher, J. (2006). *Lerntätigkeit–Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Ein Beitrag zur Entwicklung einer neuen Lernkultur im Unterricht*. Lehmanns Media.
- Lompscher (1985a). Die Ausbildung von Lernhandlungen. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 53–78). Volk und Wissen.
- Lompscher, J. (1985b). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23–52). Volk und Wissen.
- Steinhöfel, W., Reichold, K., & Frenzel, L. (1988). *Zur Gestaltung typischer Unterrichtssituationen im Mathematikunterricht*. Ministerium für Volksbildung.
- Zentgraf, K., Prediger, S., & Berkemeier, A. (2020). *Funktionsgraphen und funktionale Zusammenhänge verstehen* (DZLM, Hrsg.). [sima.dzlm.de/um/bk-004](https://sima.dzlm.de/um/bk-004)



# Beispiel: Funktionsbegriff

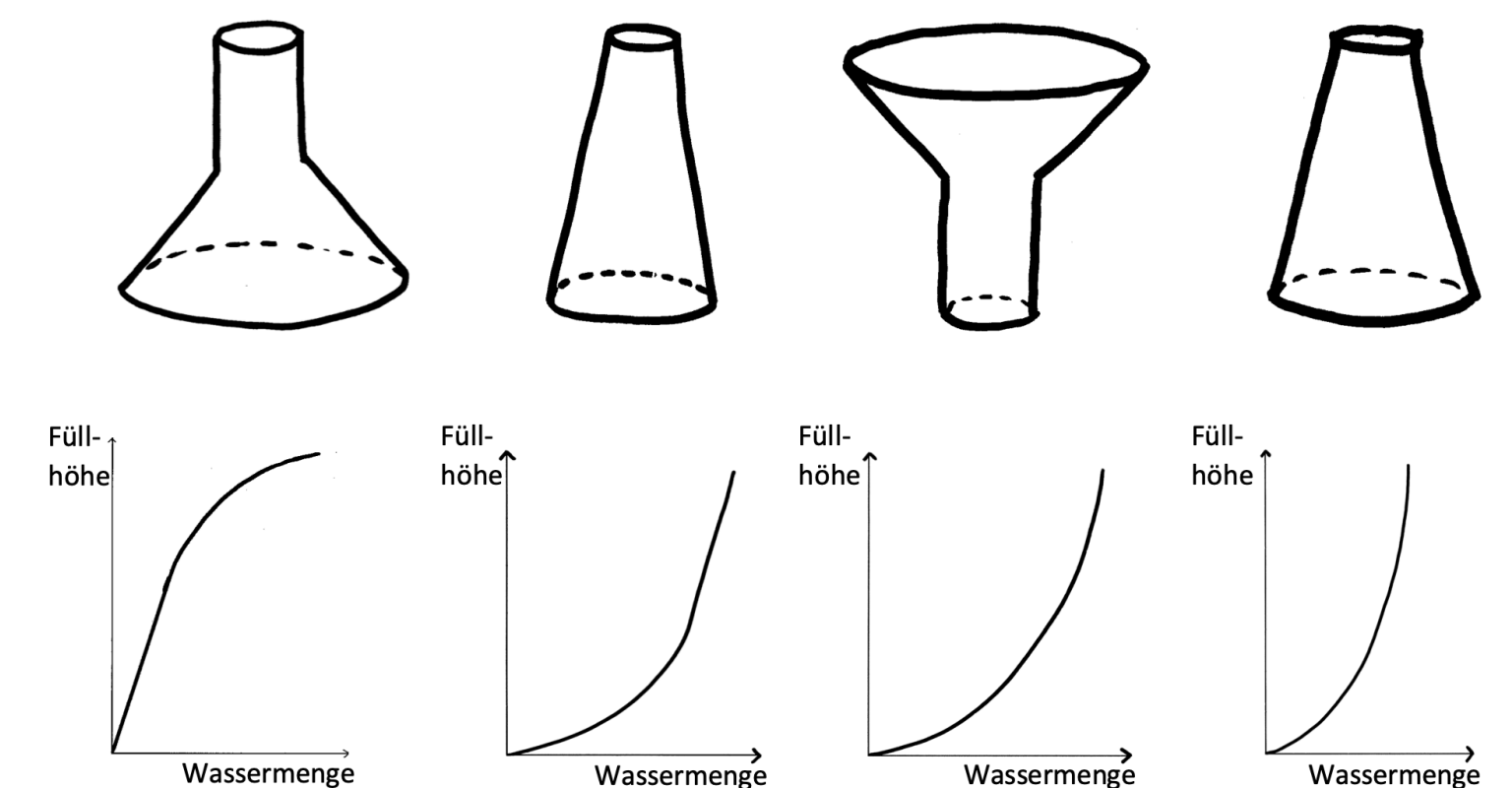
## Zone der aktuellen Leistung

- Umgang mit proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen
- Zeichnen von Wertepaaren in Diagramme
- Analyse von Diagrammen zu statistischen Erhebungen

## Anforderungssituation in der Zone der nächsten Entwicklung

*In verschiedene Gefäße wurde Wasser gefüllt und abhängig von der Wassermenge die Füllhöhe bestimmt.*

- *Entscheide, welches Gefäß zu welchem Graphen gehört.*
- *Führe das Experiment selbst mit einem Gefäß durch, in das du nacheinander jeweils 50 ml füllt. Ermittle anschließend, wie die Füllhöhe bei einer Wassermenge von 220 ml war.*



(Zentgraf et al., 2020)

# Beispiel: Funktionsbegriff

## **(erwünschtes) Lernziel**

### *hinsichtlich des gesamten Lernbereichs*

Wir wollen die Beziehung zwischen zwei sich verändernden Größen beschreiben und daraus weitere Werte bestimmen können.

### *hinsichtlich des Begriffs »Funktion«*

Wir wollen den Zusammenhang zwischen zwei Größen mithilfe eines Begriffs beschreiben und diesen Begriff verstehen.

# Funktionsbegriff

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, d. h. jedem Element einer Ausgangsmenge wird genau ein Element einer Zielmenge zugeordnet.

## Anregung von außen

*Entscheide, ob es sich bei ... um eine Funktion handelt.*

Erforderte Lernhandlung:  
Identifizieren

## Orientierungshilfe

Prüfe am gegebenen Beispiel folgende Fragen:

- Was ist die **Ausgangsmenge**?
- Was ist die **Zielmenge**?
- Erfolgt die **Zuordnung** tatsächlich von der Ausgangsmenge zur Zielmenge?
- Wird **jedem** Element der Ausgangsmenge etwas zugeordnet?
- Wird jedem Element der Ausgangsmenge **genau ein** Element zugeordnet?

# Funktionsbegriff

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, d. h. jedem Element einer Ausgangsmenge wird genau ein Element einer Zielmenge zugeordnet.

## Anregung von außen

*Gib ein Beispiel für eine Funktion an.*

Erforderte Lernhandlung:  
Realisieren

## Orientierungshilfe

- Gib eine **Ausgangsmenge** und eine **Zielmenge** an.
- Formuliere eine **Zuordnung** von der Ausgangsmenge zur Zielmenge.
- Achte darauf, dass **jedem** Element der Ausgangsmenge **genau ein** Element der Zielmenge zugeordnet wird.

# Funktionsbegriff

Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung, d. h. jedem Element einer Ausgangsmenge wird genau ein Element einer Zielmenge zugeordnet.

## Festigungsaufgaben

- *Entscheide, ob es sich um den Graphen einer Funktion handelt.*
- *Formuliere eine Definition des Funktionsbegriffs mit eigenen Worten.*
- *Gib für die Funktion ›Jeder Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet‹ eine Funktionsgleichung an, in der nicht die Variablen  $f$ ,  $x$  und  $y$  auftreten.*
- *Beschreibe an einem Beispiel, was der Unterschied zwischen Zuordnungen und Funktionen ist. Entscheide, ob es sich bei proportionalen Zuordnungen um Funktionen handelt und begründe deine Entscheidung.*

