

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

# **Stoffdidaktik Mathematik**

Kapitel 4 – Grundvorstellungen

# Stoffdidaktik Mathematik

## Kapitel 4 – Grundvorstellungen

- Sie können die Grundvorstellungsidee beschreiben und wissen über deren Bedeutung für den Mathematikunterricht.
- Ihnen ist bewusst, dass Grundvorstellungen i. d. R. zu Begriffen (Objekten und Operationen) existieren.
- Sie kennen Grundvorstellungen zu einzelnen mathematischen Begriffen.

primär

sekundär

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

# Grundvorstellungen

normativ

deskriptiv

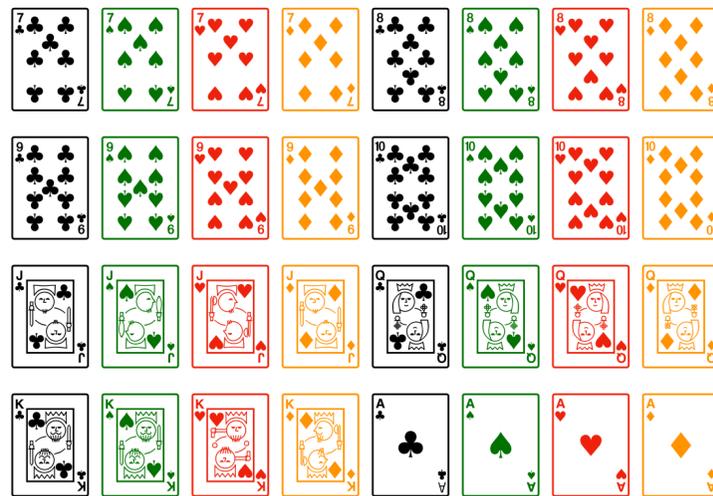
konstruktiv

Aspekte vs. GV

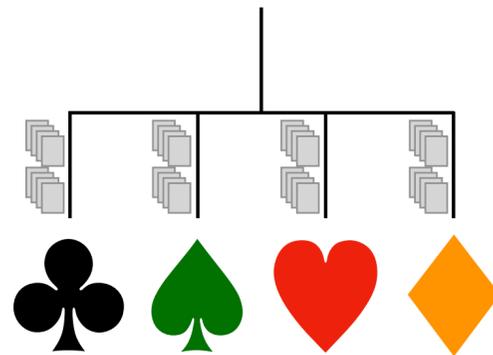
Grundvorstellungen zu ...

# Grundvorstellungen

Handlungserfahrung



Repräsentationen



Anwendung auf Realität

Würfeln  
Glücksrad  
Laplace-Experimente

Wahrscheinlichkeit  
als relativer Anteil

primär

sekundär

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Aspekte vs. GV

Grundvorstellungen zu ...

# Grundvorstellungen

Die **Grundvorstellungsidee** beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und** dem Phänomen der **individuellen Begriffsbildung**.

In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:

- Sinnkonstituierung eines Begriffs durch **Anknüpfung an** bekannte **Sach- oder Handlungszusammenhänge** bzw. **Handlungsvorstellungen**,
- Aufbau entsprechender (visueller) **Repräsentationen** bzw. **»Verinnerlichungen«**, die **operatives Handeln** auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
- Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch **Erkennen der** entsprechenden **Struktur in Sachzusammenhängen** oder durch Modellieren des Sachproblems **mit Hilfe der mathematischen Struktur**.

(vom Hofe, 1995, S. 97 f.)

primär

sekundär

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Aspekte vs. GV

Grundvorstellungen zu ...

# Grundvorstellungen

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

primär

sekundär

(vom Hofe, 2014)

normativ

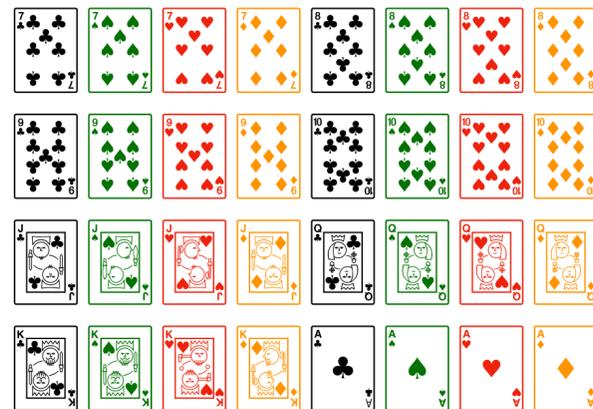
deskriptiv

konstruktiv

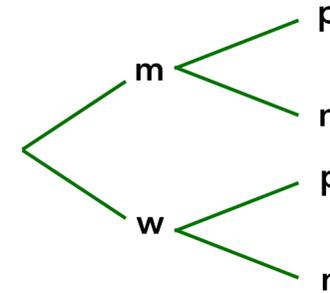
Aspekte vs. GV

Grundvorstellungen zu ...

Wahrscheinlichkeit



Bedingte  
Wahrscheinlichkeit



|   | m   | w   |            |
|---|-----|-----|------------|
| p | 50  | 20  | 70         |
| n | 280 | 300 | 580        |
|   | 330 | 320 | <b>650</b> |

# Grundvorstellungen



»Ein **Aspekt** eines mathematischen Begriffs ist ein Teilbereich des Begriffs, mit dem dieser fachlich charakterisiert werden kann.«

## Ordinalzahlaspekt

(charakterisiert über Peano-Axiome)

## Kardinalzahlaspekt

(charakterisiert über Äquivalenzklassen gleichmächtiger Mengen)

»Eine **Grundvorstellung** zu einem mathematischen Begriff ist eine inhaltliche Deutung des Begriffs, die diesem Sinn gibt.«

Natürliche Zahl als Position in einer Reihung,  
Addition als Weiterzählen

Natürliche Zahl als Anzahl der Elemente einer Menge,  
Addition als Zusammenfügen

(Greefrath et al., 2016, S. 17)

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

primär

sekundär

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Grundvorstellungen zu ...

# Grundvorstellungen

Grundvorstellungen zu ...

Die **Grundvorstellungsidee** beschreibt **Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten** und dem Phänomen der **individuellen Begriffsbildung**.

(vom Hofe, 1995, S. 97 f.)

**Begriffe**

**Sachverhalte/  
Zusammenhänge**

**Verfahren**

**Objekte**

nat. Zahlen

**Operationen**

addieren, dividieren

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

primär

sekundär

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Aspekte vs. GV

# Grundvorstellungen

Grundvorstellungen zu ...

## Wahrscheinlichkeit

- als relativer Anteil  
»theoretische Wahrscheinlichkeit«
- als relative Häufigkeit  
»frequentistische Wahrscheinlichkeit«
- als subjektives Vertrauen  
»subjektivistische Wahrscheinlichkeit«

Wahrscheinlichkeiten  
bestimmen

Wahrscheinlichkeit eines mehrstufigen  
Zufallsexperiments ermitteln

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

primär

sekundär

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Aspekte vs. GV

(Malle & Malle, 2003; Krüger et al., 2015, S. 234 ff.)

# Grundvorstellungen

normativ

deskriptiv

konstruktiv

Handlungserfahrung

Repräsentationen

Anwendung auf Realität

primär

sekundär

Aspekte vs. GV

Grundvorstellungen zu ...

»Welche Grundvorstellungen sind zur Lösung des Problems aus der Sicht des Lehrenden adäquat?«

»Welche individuellen Vorstellungen lassen sich im Lösungsversuch des Schülers erkennen?«

»Worauf sind etwaige Divergenzen zurückzuführen, und wie lassen sich diese beheben?«

**Wahrscheinlichkeit als**

relativer Anteil

relative Häufigkeit

subjektives Vertrauen

**Wahrscheinlichkeit als**

**»mitdenkende«**

**Eigenschaft**



Analyse der  
»Bezugsmenge«

(vom Hofe, 1995, S. 106 f.)

# Grundvorstellungen

normativ

deskriptiv

konstruktiv

## Spezifizieren

## Strukturieren

### semantische Ebene

- **Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?

- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?
- Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

(Hußmann & Prediger, 2016)

# Grundvorstellungen

normativ

deskriptiv

konstruktiv

## Spezifizieren

## Strukturieren

### empirische Ebene

- **Welche** typischen **individuellen Voraussetzungen** (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, ...) sind zu erwarten und **wie passen** diese zum **angestrebten Verständnis** (Ressourcen vs. Hindernisse)?
- **Woher** kommen typische **Hindernisse** oder **unerwünschte Vorstellungen**?

- Wie können typische **Vorkenntnisse und Vorstellungen** als **fruchtbare Anknüpfungspunkte** dienen?
- Welche **Schlüsselstellen** (Hindernisse, Wendepunkte, ...) gibt es **im Lernweg** der Schüler/-innen?
- Wie kann der angestrebte **Lernpfad** bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen **neu angeordnet** werden?

(Hußmann & Prediger, 2016)

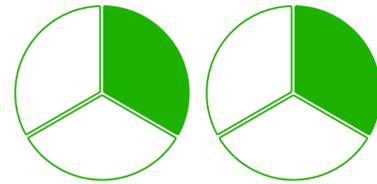
# Brüche

Handlungserfahrung

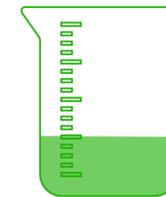
Repräsentationen

Anwendung auf Realität

Bruch als **Anteil eines Ganzen** oder **mehrerer Ganzer**



Bruch als **Maßzahl**



Bruch als **Operator**

$\frac{1}{5}$  von 250 €

Bruch als **Verhältnis**



2 von 3 Personen tragen eine Maske.

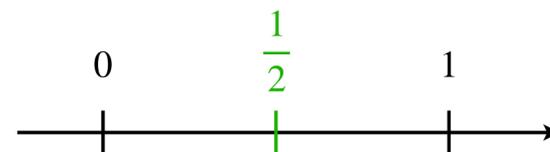
Bruch als **Quotient**

$$3 : 5 = \frac{3}{5}$$

Bruch als **Lösung einer linearen Gleichung**

$$5x = 3$$

Bruch als **Skalenwert**



**Quasikardinale Auffassung** von Brüchen

$$\frac{3}{5} \text{ als } 3 \text{ mal } \frac{1}{5}$$

(Padberg & Wartha, 2017, S. 19 ff.)

# Brüche

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

## Anteil eines Anteils

$$\frac{1}{5} \text{ von } \frac{2}{3}$$

$$3 \cdot \frac{1}{5}$$

Quasikardinaler Auffassung

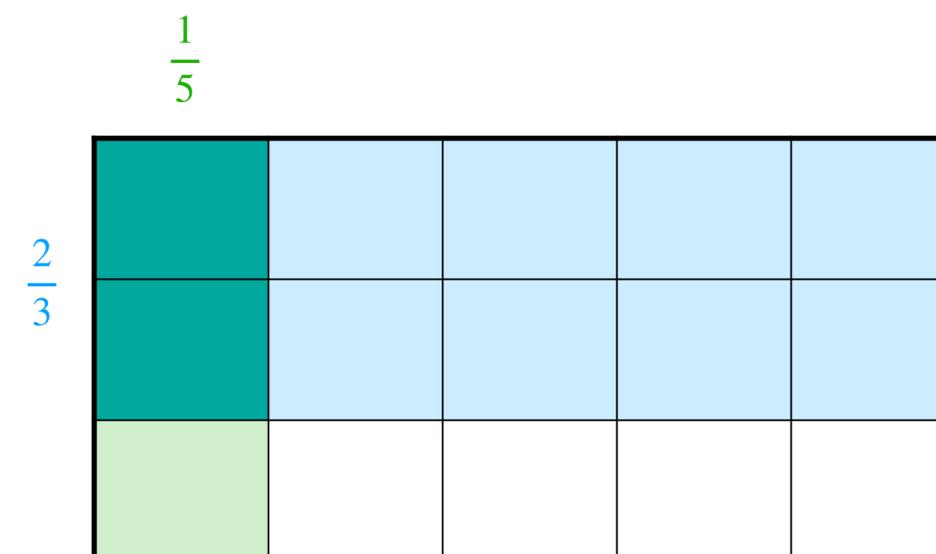
$$\frac{1}{5} \cdot 3$$

Kommutativität; Verknüpfung Anteil eines Ganzen und Anteil mehrerer Ganzer

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}$$

Verallgemeinerung  
(leider oft nur auf Kalkül-Ebene)

## Flächeninhalt

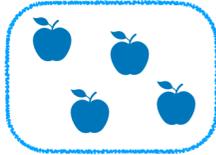


(Padberg & Wartha, 2017, S. 108 ff.)

# Ganze Zahlen

## Typische Schwierigkeiten

- Vielfältige Interpretation des Minus-Zeichens: Vor-, Rechen- und Inversionszeichen
- Kardinalzahlaspekt nicht mehr tragfähig, Ordinalzahlaspekt eingeschränkt tragfähig, Maßzahlaspekt im Prinzip erweiterbar
- Fehlinterpretation der Ordnungsrelation (nicht mehr über Mächtigkeit möglich; fehlerhafte spiegelbildliche Interpretation)

$$-5 + 2 \quad 7 - 3 \quad -a$$


$$1. \curvearrowright 2. \curvearrowright 3. \curvearrowright 4.$$

$$-5 > -3$$

## Normative (Grund-)Vorstellungen

### Negative Zahlen als

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen

(vom Hofe & Hattermann, 2014)

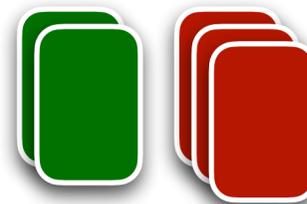
# Ganze Zahlen

## Normative (Grund-)Vorstellungen

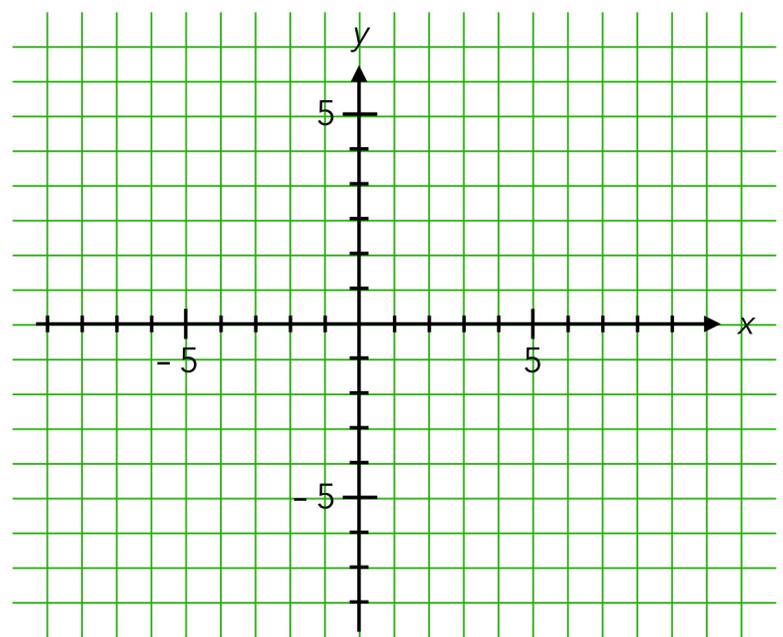
### Negative Zahlen als

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen

Guthaben: 5 €      $|-5| = 5$   
 Schulden: - 5 €



Eckhard Henkel, [https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:AuBenthermometer?uselang=de#/media/File:2014-07-24\\_AuBenthermometer\\_\(2012\)\\_von\\_Michael\\_Sailstorfer\\_IMG\\_5656.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:AuBenthermometer?uselang=de#/media/File:2014-07-24_AuBenthermometer_(2012)_von_Michael_Sailstorfer_IMG_5656.jpg), CC BY-SA 3.0 DE



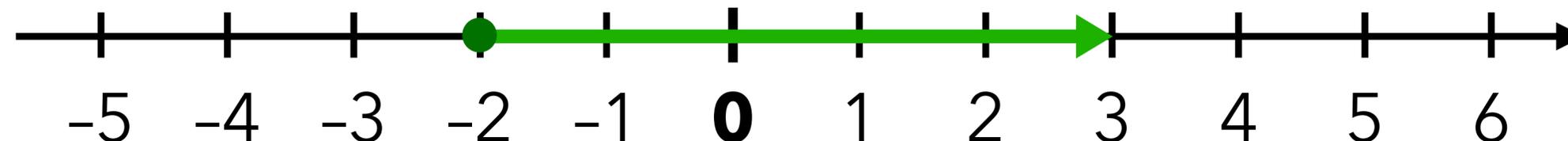
|                     | Kontobewegung | Kontostand     |
|---------------------|---------------|----------------|
|                     |               | <b>50,00 €</b> |
| Taschengeld von Oma | 5,00 €        | 55,00 €        |
| Kinoeintritt        | -8,00 €       | 47,00 €        |
| Popcorn             | -3,00 €       | 44,00 €        |
|                     |               | <b>44,00 €</b> |

# Ganze Zahlen

## Normative (Grund-)Vorstellungen

### Negative Zahlen als

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen



### Addieren/Subtrahieren als

- Pfeilanlegen
- gerichtetes Weiter-/Zurückzählen
- Subtraktion/Addition der Gegenzahl

### Multiplizieren als

- Strecken/Stauchen des Pfeils (pos. Zahl)
- Spiegeln an der Null (-1)
- Kombination aus beidem

### Größenvergleich als

- direkter Lagevergleich auf Zahlengeraden (links < rechts)
- Lage- und Betragsvergleich (neg. < pos. & betragsabhängig)

(vom Hofe & Hattermann, 2014, S. 4)

# Literatur

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>

vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Spektrum Akademischer Verlag.

vom Hofe, R. (2014). Primäre und sekundäre Grundvorstellungen. In Technische Universität Dortmund (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2014, 48. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 10.03.2014 bis 14.03.2014 in Koblenz*. WTM. <https://doi.org/10.17877/DE290R-8808>

Hattermann, M., & vom Hofe, R. (Hrsg.). (2014). *mathematik lehren 183: Zugänge zu negativen Zahlen*. Friedrich Verlag.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33-67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>

Malle, G., & Malle, S. (2003). Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *Mathematik lehren*, 118, 52-56.

Padberg, F., & Wartha, S. (2017). *Didaktik der Bruchrechnung* (5. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-52969-0>