

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 3 – Mathematik strukturieren

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 3 – Mathematik strukturieren

- Sie kennen verschiedene Möglichkeiten, Mathematik zu strukturieren.
- Sie können beschreiben, woher die verschiedenen Strukturierungsmöglichkeiten kommen.
- Sie kennen Beispiele für fundamentale Ideen der Mathematik.
- Sie können bei einzelnen Lerngegenständen den Zusammenhang zu zugehörigen fundamentalen Ideen herstellen.

Was? Wie?

Stoffdidaktische Analyse als Spezifizieren & Strukturieren von Lerngegenständen

	Spezifizieren	Strukturieren
formale Ebene		
semantische Ebene		
Ziel heute: Mathematik verstehen, indem wir Mathematik strukturieren		
empirische Ebene		



Lerntätigkeit als
Aneignung
gesellschaftlichen Wissen
& Könnens



Mathematik strukturieren

1

Sachgebiete

2

Leitideen

3

Arten mathematisches
Wissens

4

Fundamentale
Ideen

Perspektivwechsel vom **Formalen** (Fachliche Logik) zum **Semantischen** (Sinn und Bedeutung)



1 Sachgebiete

Arithmetik

$$9 + 4$$

Leitfaden Arithmetik
(Benölken et al., 2018)

Algebra

$$2x = 8$$

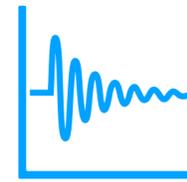
Didaktik der Algebra
(Weigand et al., 2022)

Geometrie



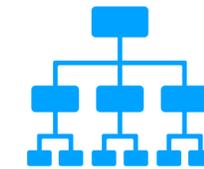
Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I
(Weigand et al., 2018)

Analysis



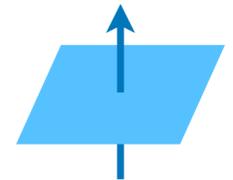
Didaktik der Analysis
(Greefrath et al., 2016)

Stochastik



Didaktik der Stochastik für die Sekundarstufe I
(Krüger et al., 2015)

Lin. Algebra / Analytische Geometrie



Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra
(Henn & Filler, 2015)

Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II

(Tietze et al., 2000a, 2000b, 2002)

2 Leitideen

Grundgesetz BRD

Art. 30 & 70



Kulturhoheit der
Länder

Kultusministerkonferenz (KMK)

Sekretariat der Ständigen Konferenz der
Kultusminister der Länder in der
Bundesrepublik Deutschland



Bildungsstandards



Landesverfassung und Schulgesetz Brandenburg



Rahmenlehrpläne

Ihre verbindliche Grundlage
zum Unterrichten an
Brandenburger Schulen
(§10 BbgSchulG)

2 Leitideen

Grundgesetz BRD

Artikel 7

(1) Das gesamte Schulwesen steht unter der Aufsicht des Staates.

Artikel 30

Die Ausübung der staatlichen Befugnisse und die Erfüllung der staatlichen Aufgaben ist Sache der Länder, soweit dieses Grundgesetz keine andere Regelung trifft oder zuläßt.

Kulturhoheit der Länder

Artikel 79

(1) Das Grundgesetz kann nur durch ein Gesetz geändert werden, das den Wortlaut des Grundgesetzes ausdrücklich ändert oder ergänzt. [...]

(2) Ein solches Gesetz bedarf der Zustimmung von zwei Dritteln der Mitglieder des Bundestages und zwei Dritteln der Stimmen des Bundesrates.

(3) Eine Änderung dieses Grundgesetzes, durch welche die Gliederung des Bundes in Länder, die grundsätzliche Mitwirkung der Länder bei der Gesetzgebung oder die in den Artikeln 1 und 20 niedergelegten Grundsätze berührt werden, ist unzulässig.

2 Leitideen

Landesverfassung Brandenburg

Artikel 30 (Schulwesen)

- (1) Es besteht allgemeine Schulpflicht.
- (2) Das Schulwesen steht unter der Aufsicht des Landes. Bei der Gestaltung wirken Eltern, Lehrkräfte, Schülerinnen und Schüler sowie ihre Vertretungen und Verbände mit.
- (3) Das Schulwesen muss Offenheit, Durchlässigkeit und Vielfalt der Bildungsgänge gewährleisten.
- (4) Für die Aufnahme in weiterführende Schulen sind neben dem Wunsch der Erziehungsberechtigten Fähigkeiten, Leistungen und Neigungen der Schülerin oder des Schülers maßgebend.
- (5) Das Land und die Träger kommunaler Selbstverwaltung haben die Pflicht, Schulen einzurichten und zu fördern. Für diese Schulen besteht Schulgeldfreiheit. Lern- und Lehrmittelfreiheit sind durch Gesetz zu regeln.
- (6) Das Recht zur Errichtung von Schulen in freier Trägerschaft wird nach Maßgabe von Artikel 7 Absatz 4 des Grundgesetzes gewährleistet. Die Träger haben Anspruch auf einen öffentlichen Finanzierungszuschuss.

2 Leitideen

Schulgesetz Brandenburg

§ 10 Rahmenlehrpläne

(1) Der Unterricht wird auf der Grundlage von Rahmenlehrplänen erteilt. Die Rahmenlehrpläne bestimmen die verbindlichen Anforderungen und Inhalte (Kerncurriculum) ebenso wie die Gestaltungsfreiräume und Wahlmöglichkeiten im Unterricht der Fächer, Lernbereiche, übergreifenden Themenkomplexe oder Lernfelder.

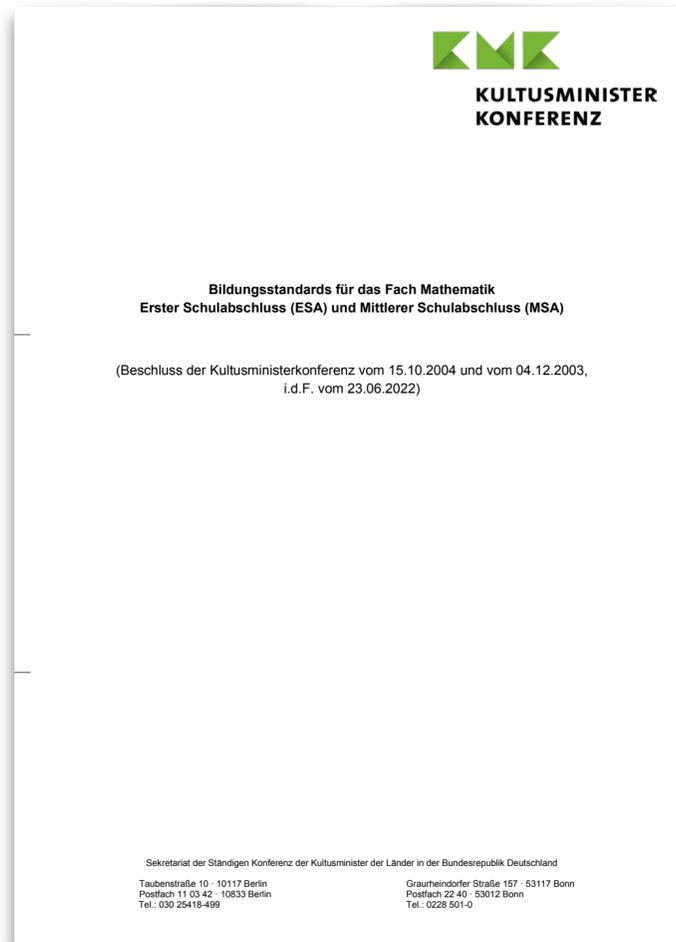
(2) [...]

(3) Die Rahmenlehrpläne sind so zu gestalten, dass den unterschiedlichen Fähigkeiten, Leistungen und Neigungen der Schülerinnen und Schüler sowie der pädagogischen Eigenverantwortung der Lehrkräfte entsprochen werden kann und die Schule einen hinreichend großen Entscheidungsraum für die Gestaltung eines eigenen Profils erhält. Sie gewährleisten, dass die Ziele der durch die Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland beschlossenen Bildungsstandards erreicht werden können, insbesondere die dort beschriebenen erwarteten Lernergebnisse, allgemeinen Bildungsziele und Kompetenzen, die die Schülerinnen und Schüler bis zu einer bestimmten Jahrgangsstufe erworben haben sollen.

(4) In die Erarbeitung der Rahmenlehrpläne sind insbesondere Erfahrungen und Vorschläge aus der Schulpraxis umfassend einzubeziehen. [...]

[...]

2 Leitideen



2022

2012

**Bildungsstandards
im Fach Mathematik
für die
Allgemeine Hochschulreife**

(Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012)



2023

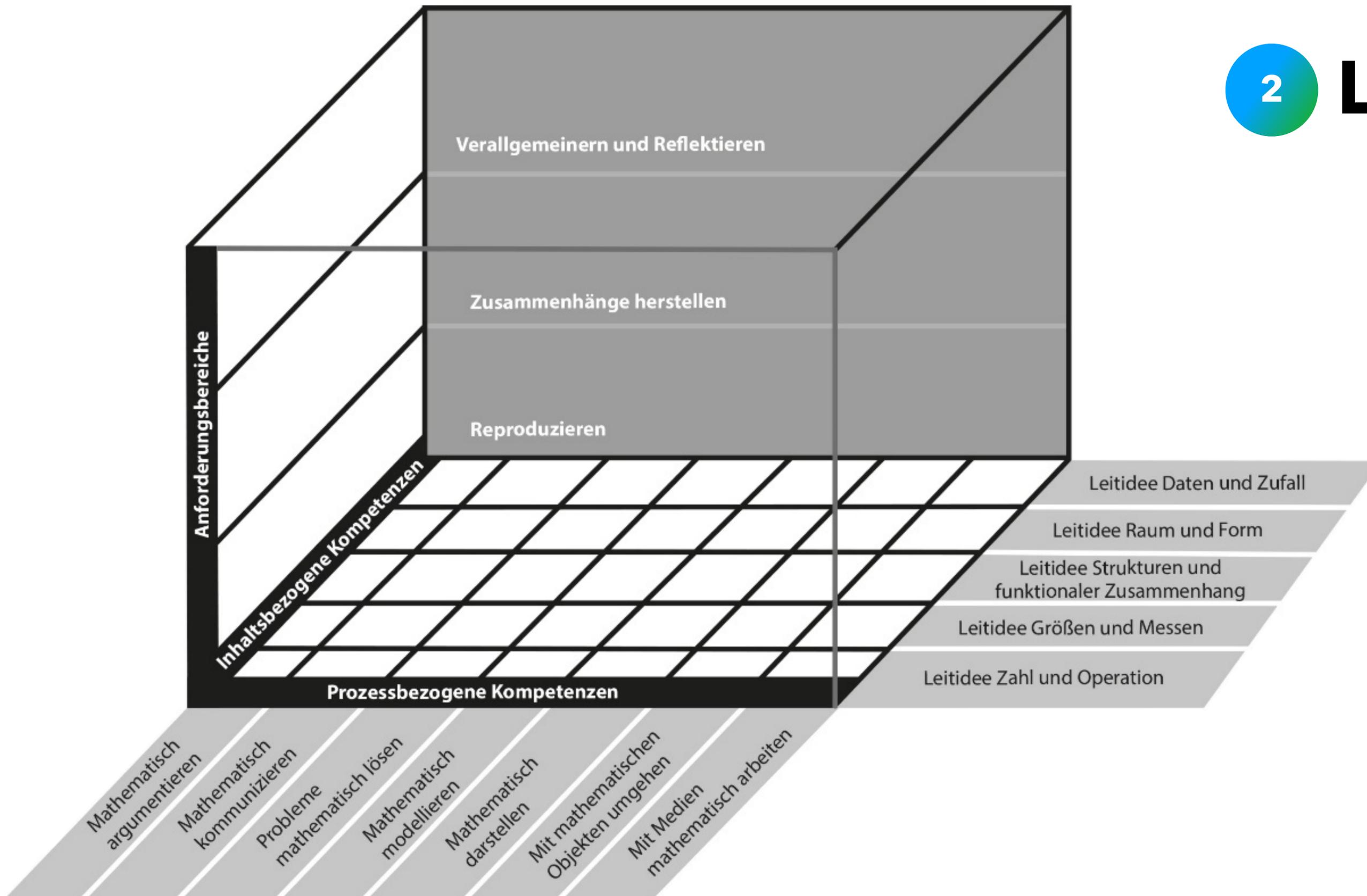
2022

Ministerium für Bildung,
Jugend und Sport
Land Brandenburg

Rahmenlehrplan
für den Unterricht in der
gymnasialen Oberstufe im
Land Brandenburg

Mathematik

2 Leitideen



(KMK, 2022, S. 8)

2

Leitideen

Leitidee Zahl und Operation

Diese Leitidee umfasst sinntragende Vorstellungen und Darstellungen von Zahlen und Operationen sowie die Nutzung von Rechengesetzen und Kontrollverfahren. Dazu gehören die sachgerechte Nutzung von Prozent- und Zinsrechnung ebenso wie kombinatorische Überlegungen und Verfahren, denen Algorithmen zu Grunde liegen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Arithmetik, Algebra und Stochastik.

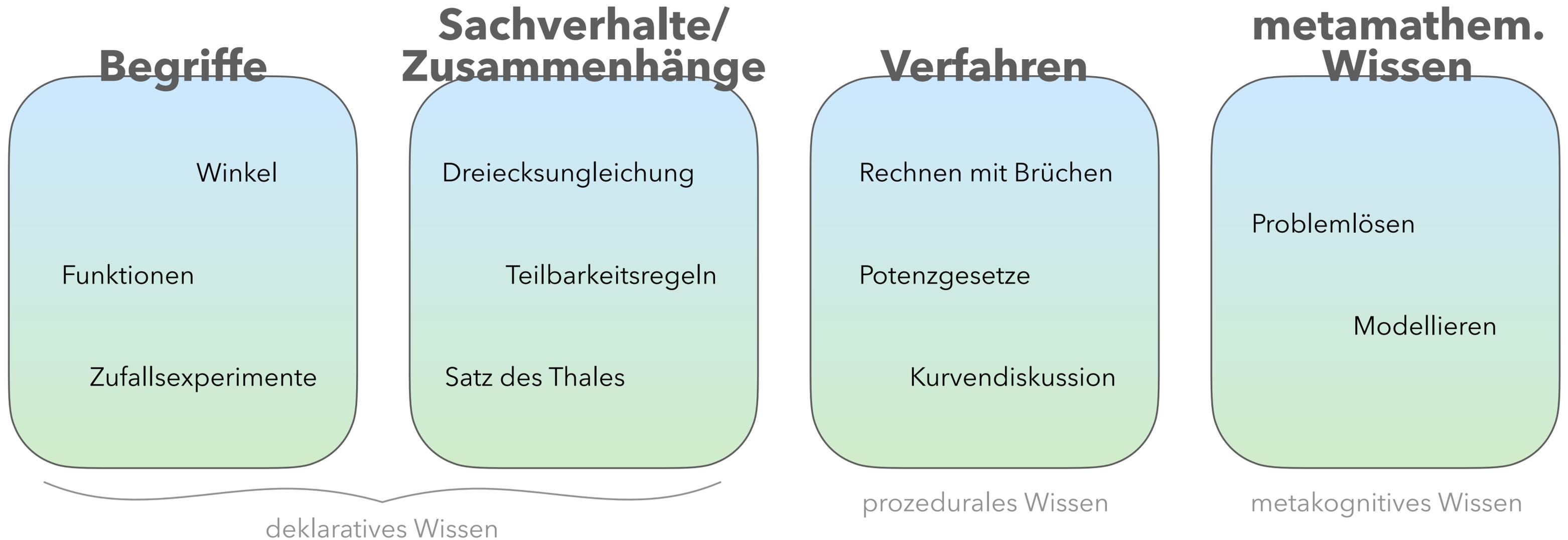
Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen sinntragende Vorstellungen von rationalen Zahlen, insbesondere von natürlichen, ganzen und gebrochenen Zahlen entsprechend der Verwendungsnotwendigkeit,
- nutzen sinntragende Vorstellungen von reellen Zahlen (z. B. Vollständigkeit der Zahlengerade),
- nutzen sinntragende Vorstellungen von Operationen rationaler Zahlen (z. B. schrittweiser, halbschriftlicher Verfahren),
- untersuchen Zahlen nach ihren Faktoren, in einfachen Fällen ohne digitale Mathematikwerkzeuge,
- stellen Zahlen der Situation angemessen dar, z.B. unter anderem in Zehnerpotenzschreibweise,
- rechnen mit natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen, die im täglichen Leben vorkommen, sowohl zur Kontrolle als auch im Kopf und erklären die Bedeutung der Rechenoperationen,
- beschreiben die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen von \mathbb{N} nach \mathbb{Z} und \mathbb{Q} sowie von \mathbb{Q} nach \mathbb{R} an Beispielen,
- erläutern an Beispielen die verschiedenen Vorstellungen zum Bruchbegriff (insbesondere Teile eines oder mehrerer Ganzer, relative Anteile),
- nutzen Rechengesetze (z. B. Kommutativ-, Assoziativ-, Distributivgesetz), auch zum vorteilhaften Rechnen,
- nutzen Überschlagsrechnungen zur Orientierung und zur Kontrolle,
- runden Zahlen dem Sachverhalt entsprechend sinnvoll,
- prüfen und interpretieren Ergebnisse, auch in Sachsituationen,
- erläutern an Beispielen den Zusammenhang zwischen Rechenoperationen und deren Umkehrungen und nutzen diese Zusammenhänge,
- verwenden Prozent- und Zinsrechnung vorstellungsbasiert (z. B. Prozentstreifen) und sachgerecht,
- erläutern Potenzen und Wurzeln und berechnen einfache Potenzen und Wurzeln,
- wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an,
- wählen, beschreiben und bewerten Vorgehensweisen und Verfahren, denen Algorithmen bzw. Kalküle zu Grunde liegen und führen diese aus (z. B. schriftliche Rechenoperationen sowie bei Wurzeln und Potenzen),
- implementieren ein algorithmisches Verfahren (z. B. Heron-Verfahren zur Bestimmung von Quadratwurzeln, Intervallschachtelung) mit digitalen Mathematikwerkzeugen,
- führen in konkreten Situationen systematische Zählprinzipien aus (z. B. Anzahl Händeschütteln, wenn man jeder Person die Hand gibt),
- führen Zahlenfolgen fort, auch unter Verwendung von Variablen als allgemeine Zahl.

(KMK, 2022, S. 15 f.)

3

Arten mathematischen Wissen



(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)

Kenntnisse/Fähigkeiten/Fertigkeiten über ...

Begriffe

- die Bezeichnung des Begriffs kennen
- Beispiele angeben und jeweils begründen können, weshalb es sich um ein Beispiel handelt
- begründen können, weshalb etwas nicht unter den Begriff fällt
- charakteristische Eigenschaften des Begriffs kennen
- Oberbegriffe, Unterbegriffe und Nachbarbegriffe kennen
- mit dem Begriff beim Argumentieren und Problemlösen arbeiten können

Sachverhalte/ Zusammenhänge

- den Sachverhalt angemessen formulieren können
- Beispiele für den Sachverhalt angeben können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen der Sachverhalt gilt
- den Sachverhalt begründen können
- Konsequenzen des Sachverhalts kennen
- Anwendungen des Sachverhalts kennen

Verfahren

- wissen, was man damit erreicht
- wissen, wie es geht
- es auf Beispiele anwenden können
- wissen, unter welchen Voraussetzungen es funktioniert
- wissen, warum es funktioniert

(Vollrath & Roth, 2012, S. 48 ff.)

4 Fundamentale Ideen

Beispiel: Linearität

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sowie $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

f heißt in $x_0 \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine **lineare**

Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine „Fehlerfunktion“

$r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + r(h)$$

$$\text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

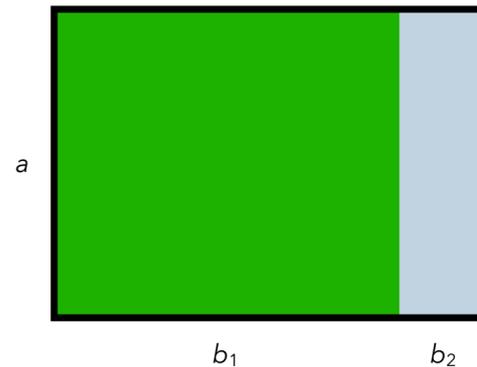
also eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
mit

$$A(h) = \mathbf{M} \cdot h \text{ für alle } h \in \mathbb{R}^n$$

Linearität

»Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden.«

(Bruner, 1976, S. 77)

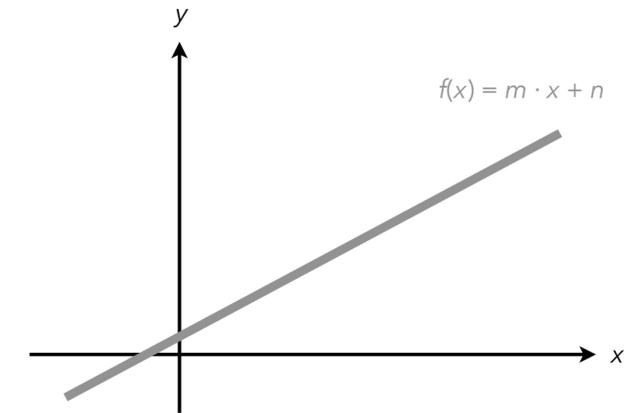


$$a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -4x - 3y = -7 \end{cases}$$

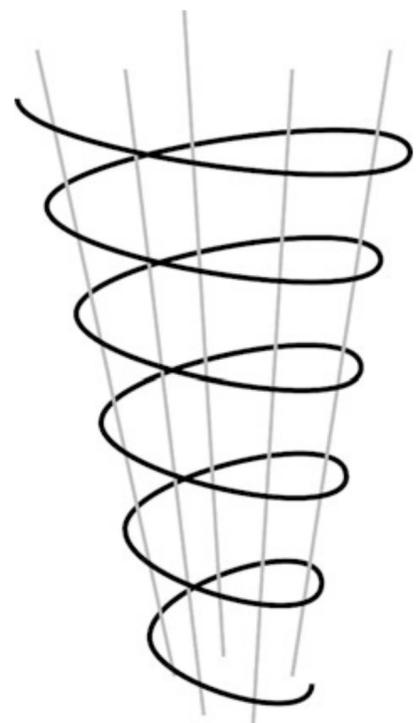
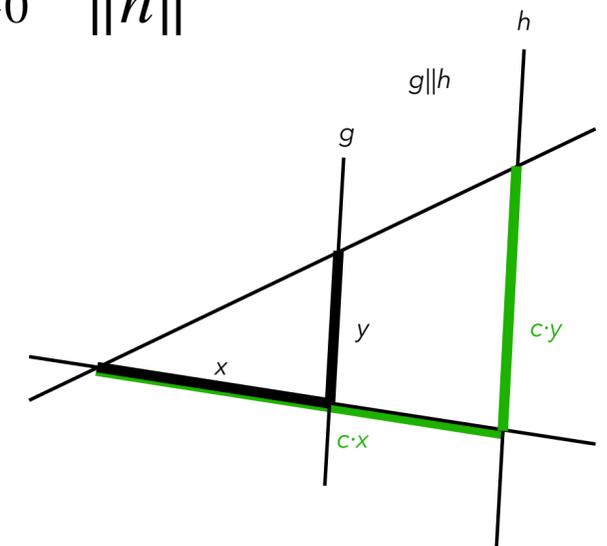
$$\sin(x) \approx x \text{ für } x \approx 0$$

(Danckwerts, 1988)



$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathbf{M} \cdot h + r(h)$$

mit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$



(Krauthausen, 2018, S. 226,
© A. Eicks)

Linearität

Anfang 1. Jtsd. n. Chr.

Lineare Interpolation

16. Jh.

systematische Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen



1729

Lösung eines Systems von drei Gleichungen in drei Unbekannten

1715

Taylor: »Linear perspective«



prop. Zuordnungen
im Alltag



1750

Lösung regulärer linearer Gleichungssysteme in zwei, drei und vier Unbekannten

17./18. Jh.

$(m \times n)$ -Schreibweise als abkürzende Schreibweise für eine lineare Substitution

1850

$(m \times n)$ -Schema als Matrix

18./19. Jh.

Gauß-Algorithmus

(Tietze et. al, 2000b, S. 73 ff.; Brückler, 2018, S. 39, 107, 119)



lineares Fernsehen

lineare Erzählung

Linearität

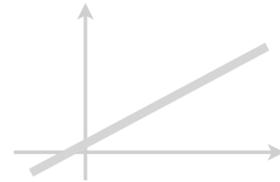
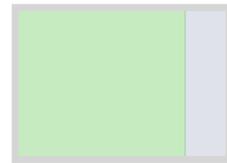
vertikal



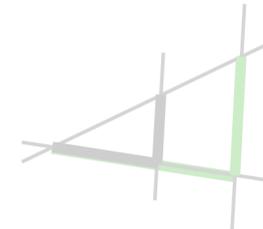
Krauthausen, 2018, S. 226

© A. Eicks

horizontal



$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -4x - 3y = -7 \end{cases}$$



$\sin(x) \approx x$ für $x \approx 0$

historisch

Anfang 1. Jtsd. n. Chr.

Lineare Interpolation

1715

Taylor: »Linear perspective«

18./19. Jh.

Gauß-Algorithmus

sinnvoll



fundamental!

4 Fundamentale Ideen

Eine **Fundamentale Idee** bzgl. eines Gegenstandsbereichs (Wissenschaft, Teilgebiet) ist ein **Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema**, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (**Horizontalkriterium**),
2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (**Vertikalkriterium**),
3. in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (**Zeitkriterium**),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (**Sinnkriterium**).

(Schwill, 1994)

4

Fundamentale Ideen

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren
- ...

(vgl. von der Bank, 2013, S. 103)

- **Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?
- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?
- Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

Mathematik strukturieren

Sachgebiete

- Arithmetik
- Algebra
- Geometrie
- Analysis
- Stochastik
- Lineare Algebra/
Analytische Geometrie

Leitideen

- Zahl und Operation
- Größen und Messen
- Raum und Form
- Strukturen und
funktionaler
Zusammenhang
- Daten und Zufall

Arten mathematischen Wissens

- Begriffe
- Sachverhalte/
Zusammenhänge
- Verfahren
- metamathematisches
Wissen

Fundamentale Ideen

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren
- ...

- von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. Bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83-124). Franzbecker. <https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2012.pdf>
- Benölken, R., Gorski, H.-J., & Müller-Philipp, S. (2018). *Leitfaden Arithmetik: Für Studierende der Lehrämter*. Springer Fachmedien Wiesbaden. <https://doi.org/10.1007/978-3-658-22852-1>
- Brückler, F. M. (2018). *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3>
- Bruner, J. S. (1976). Die Bedeutung der Struktur im Lernprozeß. In A. Holtmann (Hrsg.), *Das sozialwissenschaftliche Curriculum in der Schule: Neue Formen und Inhalte* (S. 77-90). VS Verlag für Sozialwissenschaften. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-85275-5>
- Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. *Didaktik der Mathematik*, 16(2), 149-160.
- Gesetz über die Schulen im Land Brandenburg*. <https://bravors.brandenburg.de/gesetze/bbgschulg>
- Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H.-S., Ulm, V., & Weigand, H.-G. (2016). *Didaktik der Analysis. Aspekte und Grundvorstellungen zentraler Begriffe* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; 4. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-48877-5>
- Grundgesetz für die Bundesrepublik Deutschland*. <https://www.gesetze-im-internet.de/gg/BJNR000010949.html>

- Henn, H.-W., & Filler, A. (2015). *Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra: Algebraisch verstehen – Geometrisch veranschaulichen und anwenden*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43435-2>
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>
- Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3>
- Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23–52). Volk und Wissen.
- Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2023). *Rahmenlehrplan Brandenburg. Teil C, Mathematik, Jahrgangsstufen 1–10*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/getrennt_2023/BB_RLP_2023_Teil_C_Ma_GenF_1.pdf
- Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg (Hrsg.). (2022). *Rahmenlehrplan für den Unterricht in der gymnasialen Oberstufe im Land Brandenburg*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/gymnasiale_oberstufe/curricula/2022/Teil_C_RLP_GOST_2022_Mathematik.pdf
- Schwill, A. (1994). *Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik*. Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik, Wolfenbüttel. <http://www.informatikdidaktik.de/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf>

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland [KMK]. (2012).

Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland [KMK]. (2022a).

Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA). (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Taylor, B. (1715). *Linear perspective.* printed for R. Knaplock at the Bishop's-Head in St. Paul's Church-Yard. <https://nl.sub.uni-goettingen.de/id/0590700700>

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000a). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 1: Fachdidaktische Grundfragen, Didaktik der Analysis* (2. Aufl.). Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-90568-0>

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra.* Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6>

Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 3: Didaktik der Stochastik.* Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-83144-6>

Verfassung des Landes Brandenburg. <https://bravors.brandenburg.de/de/gesetze-212792>

Literatur

4/4

Vollrath, H.-J., & Roth, J. (2012). *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe* (F. Padberg, Hrsg.; 2. Aufl.). Spektrum Akademischer Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2855-4>

Weigand, H.-G., Filler, A., Hölzl, R., Kuntze, S., Ludwig, M., Roth, J., Schmidt-Thieme, B., & Wittmann, G. (2018). *Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-56217-8>

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: Nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1>