Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 2 – (Hoch-)Schulmathematik

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 2 – (Hoch-)Schulmathematik

- Sie erkennen den Nutzen der **Hochschulmathematik** bei der Entscheidungsfindung zur Spezifizierung und Strukturierung der **Schulmathematik** auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatzes.
- Sie kennen geeignete Quellen zur Beantwortung der Fragen auf der formalen Ebene des Vier-Ebenen-Ansatz

Was? Wie?

Stoffdidaktische Analyse als Spezifizieren & Strukturieren von Lerngegenständen

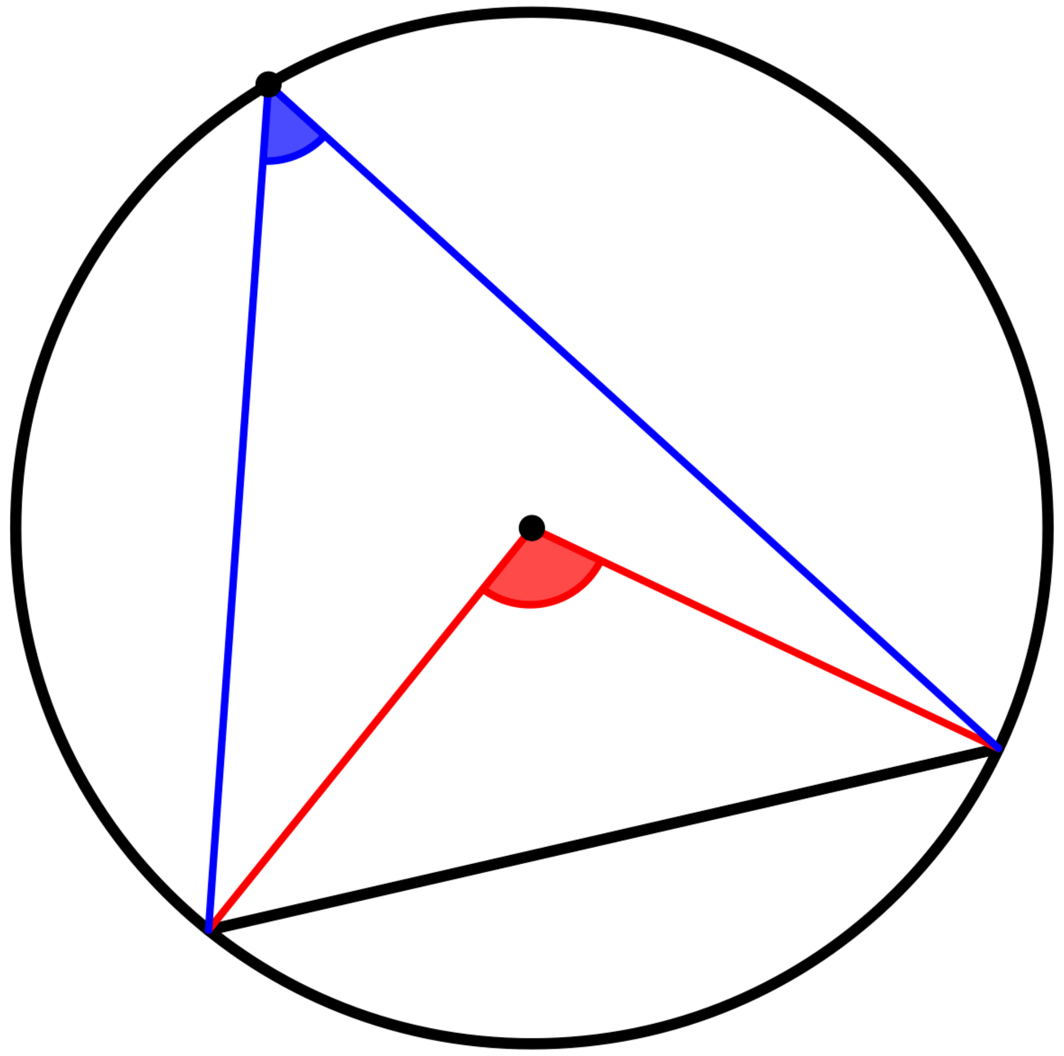
	Spezifizieren	Strukturieren
formale Ebene	- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden? - **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?	- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**? - Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam? - Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Sätze am Kreis

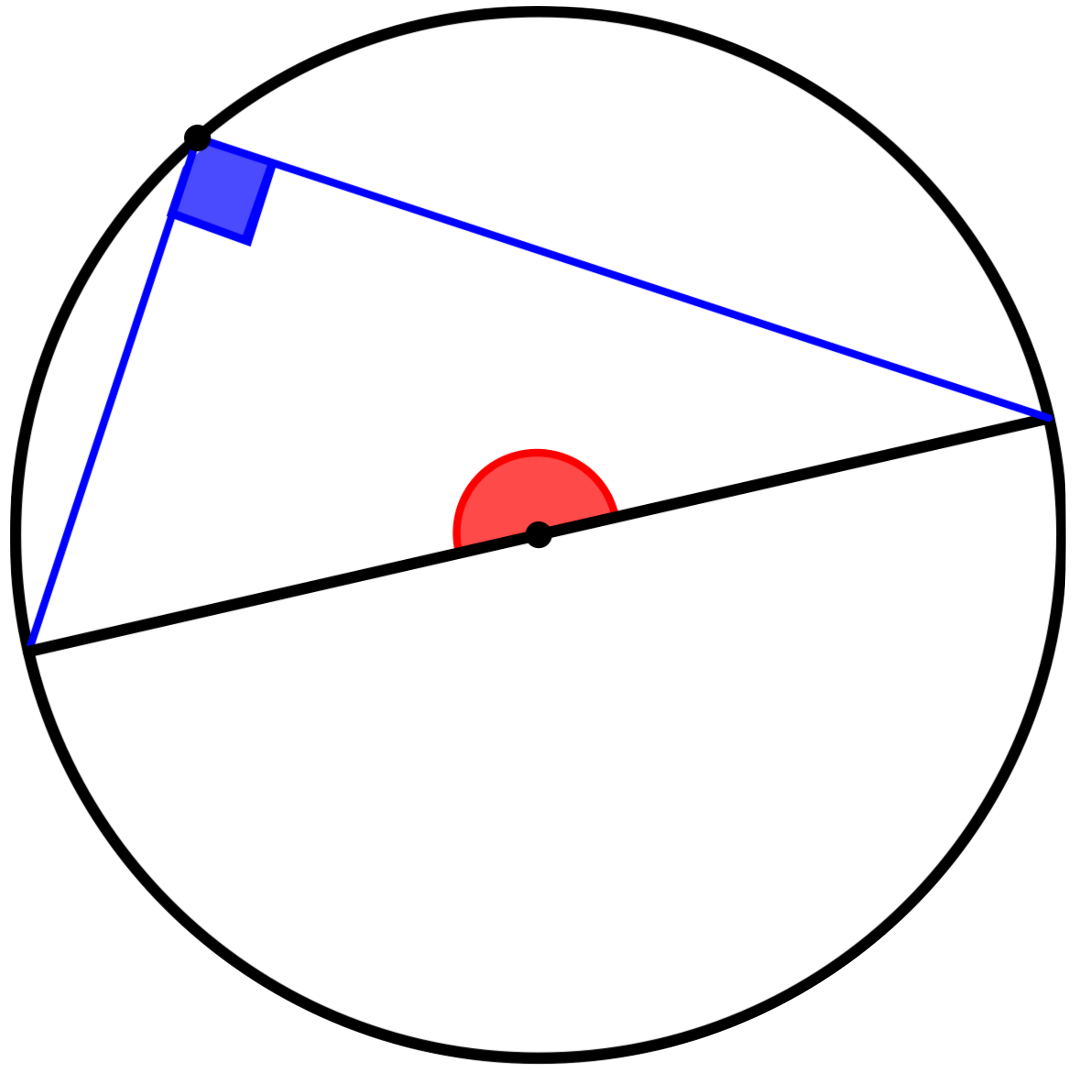
Zentri-Peripheriewinkelsatz

Der **Zentriwinkel** über der **Sehne** eines Kreises ist stets doppelt so groß wie ein **Peripheriewinkel** auf derselben Seite derselben Sehne.



Peripheriewinkelsatz

Alle **Peripheriewinkel** auf derselben Seite über derselben Sehne sind gleich groß.



Satz des Thales

Alle **Peripheriewinkel** über dem **Durchmesser** eines Kreises haben eine Größe von 90°.

und seine Umkehrung

Der Mittelpunkt der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist Mittelpunkt eines Kreises durch alle drei Ecken des Dreiecks.

- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Sätze am Kreis

Axiome der Elementargeometrie

⇣

Wechselwinkelsatz

↓

Seite-Winkel-Beziehung

Basiswinkelsatz

Innenwinkelsatz

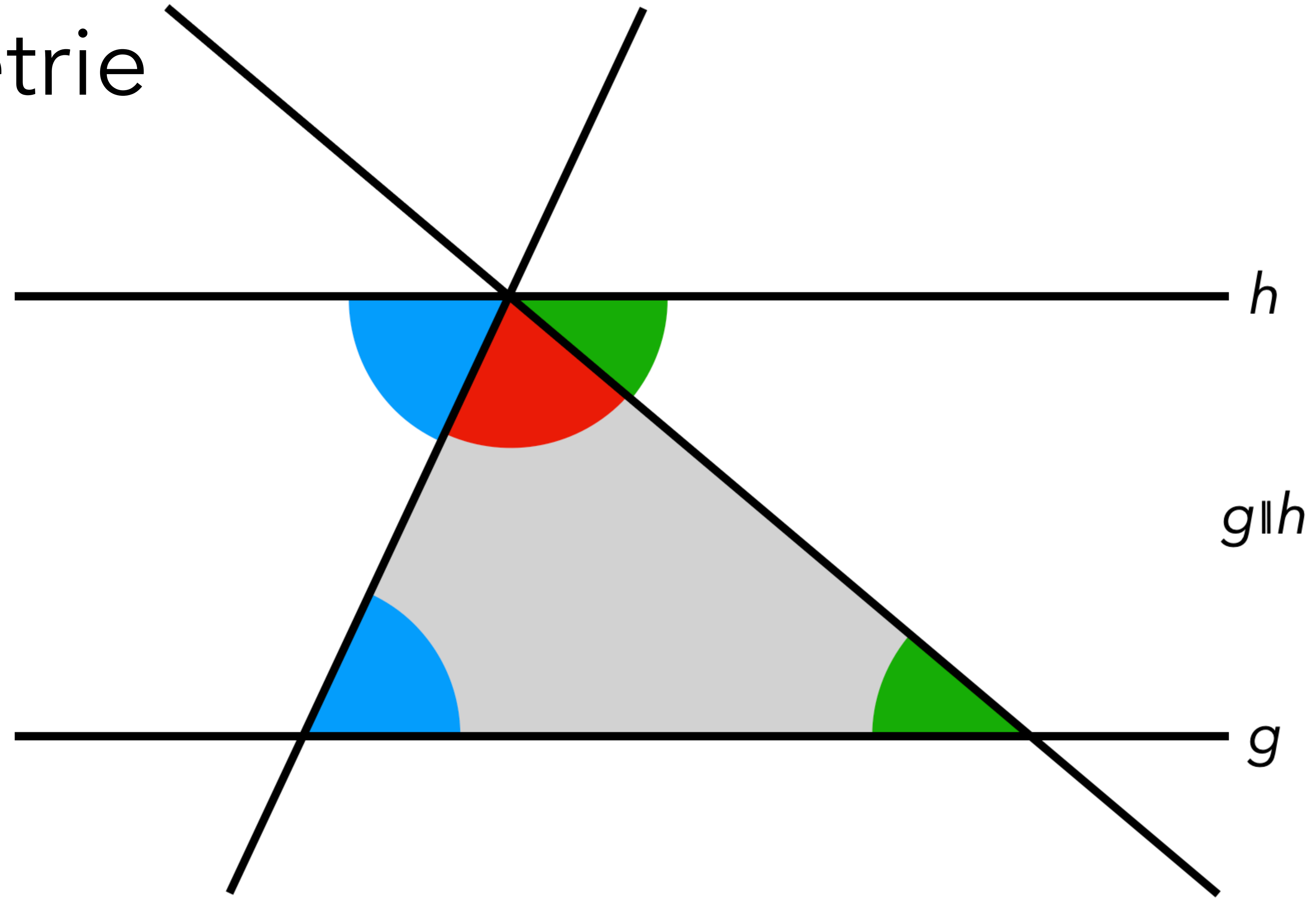
↓

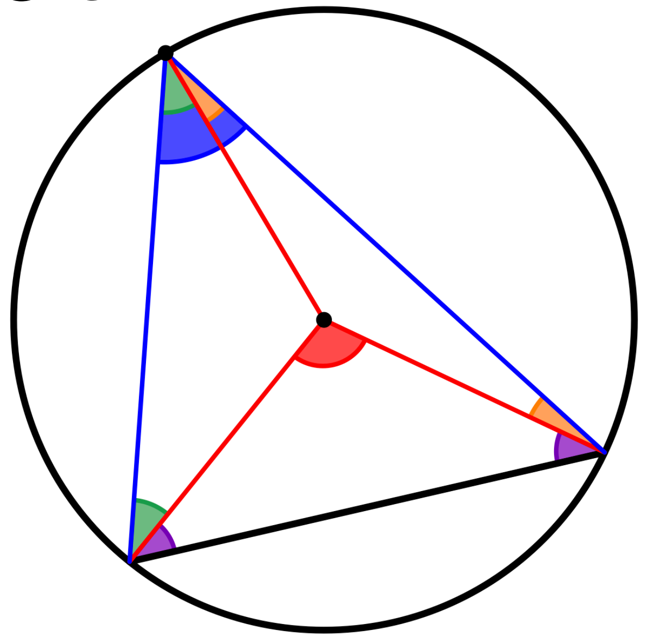
Zentri-Peripheriewinkelsatz

Peripheriewinkelsatz

Satz des Thales

und seine Umkehrung





- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Sätze am Kreis

Axiome der Elementargeometrie

empirische Erarbeitung

Wechselwinkelsatz

↓

Seite-Winkel-Beziehung

Basiswinkelsatz

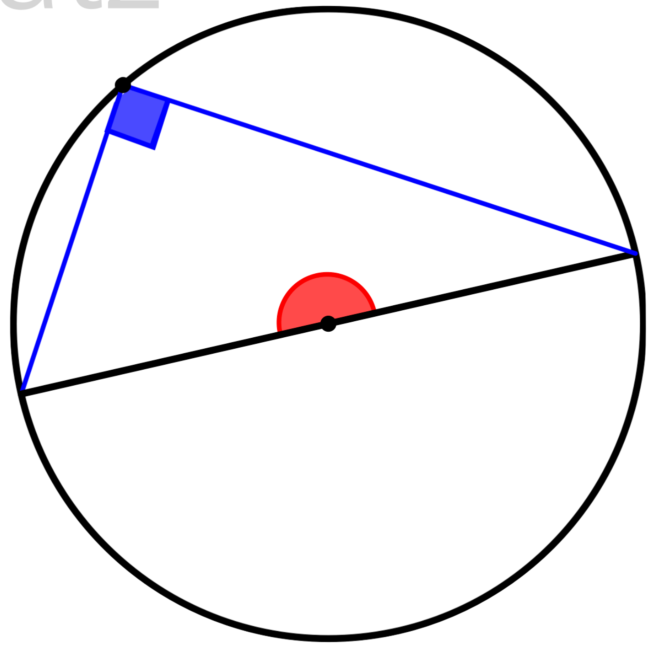
Innenwinkelsatz

↓

Zentri-Peripheriewinkelsatz

Peripheriewinkelsatz

Satz des Thales
und seine Umkehrung



- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Sätze am Kreis

Wechselwinkelsatz

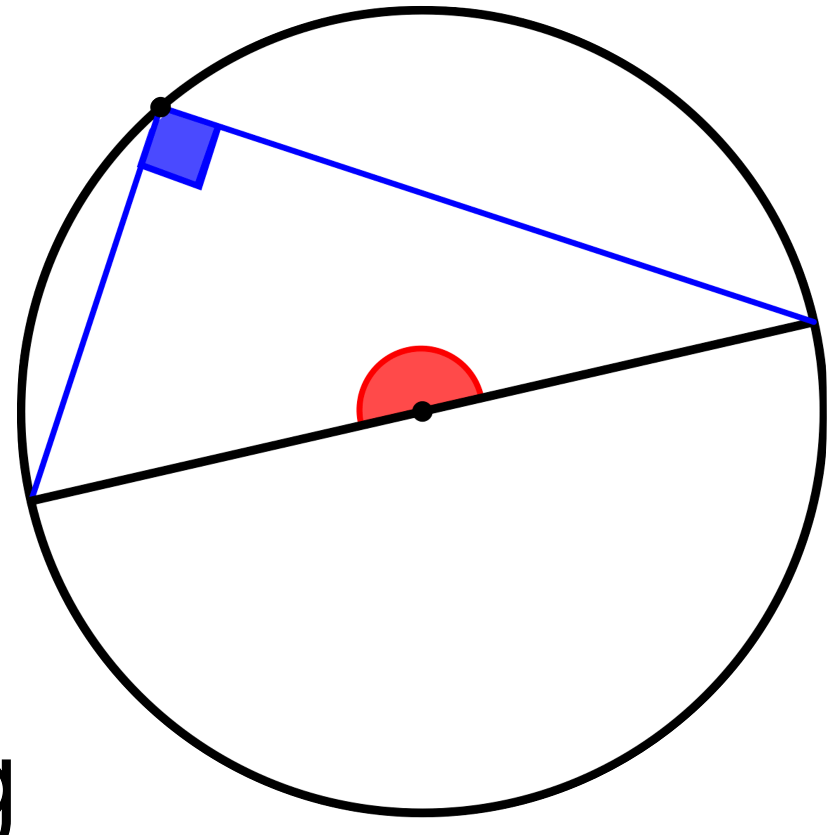
↓

Basiswinkelsatz

Innenwinkelsatz

↓

Satz des Thales
und seine Umkehrung



Erster Entwurf eines Lernpfades aufgrund der stoffdidaktischen Analyse auf der formalen Ebene

- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Welche Quellen helfen, diese Fragen zu beantworten?

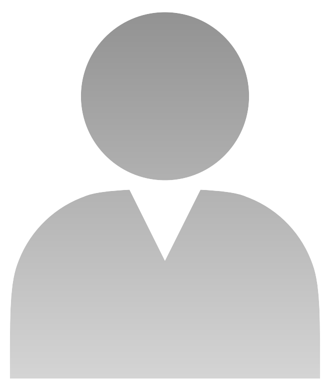
- **fachmathematische Literatur**
- **Literatur über »Schulmathematik vom höheren Standpunkt«**
- **fachdidaktische Literatur (v. a. Bücher zur »Didaktik der …«)**
- Schulbücher
- Bildungsstandards, Rahmenlehrplan, schulinterne Curricula

- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

fachliche und verstehensorientierte Durchdringung der Schulmathematik, »ohne im vollen Umfang auf das Instrumentarium der kanonischen […] [Hochschulmathematik] zurückgreifen zu müssen«

(Danckwerts, 2013, S. 87)



Schulmathematik → Hochschulmathematik → Schulmathematik

»doppelte Diskontinuität«

(Klein, 1967, S. 1; Erstausgabe 1908)

Schulmathematik vom höheren Standpunkt

Weiterführende Literatur

Felix Klein
Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus
(Klein, 1925, 1955, 1967)

Mathematik Neu Denken
(Beutelspacher et al., 2012)

Hans Freudenthal
Mathematik als pädagogische Aufgabe
(Freudenthal, 1973b, 1973c,
auch auf Englisch: Freudenthal, 1973a)

Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung
(Ableitinger et al., 2013)

$\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}_+$? Erst mal $\mathbb{N}$ …

Peano-Axiome

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

0	$0'$	$0''$	$0'''$	…							
null	eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	zehn	elf
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	

Addition

$n + k$ ist der k-fache Nachfolger von n

formal:

$n + 0 = n$

$n + k' = (n + k)'$ $\qquad 1 + 1 = 1 + 0' = (1 + 0)' = 1' = 2$

Ordnungsrelation

$n < m \iff \exists\, k\colon m = n + k$

Subtraktion

$m - n = k \iff n + k = m$

Multiplikation

$n \cdot 1 = n$

$n \cdot k' = n \cdot k + n$

(Wikipedia, 2021)

$\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}_+$? Erst mal $\mathbb{N}$ …

Mächtigkeit von Mengen über Bijektionen

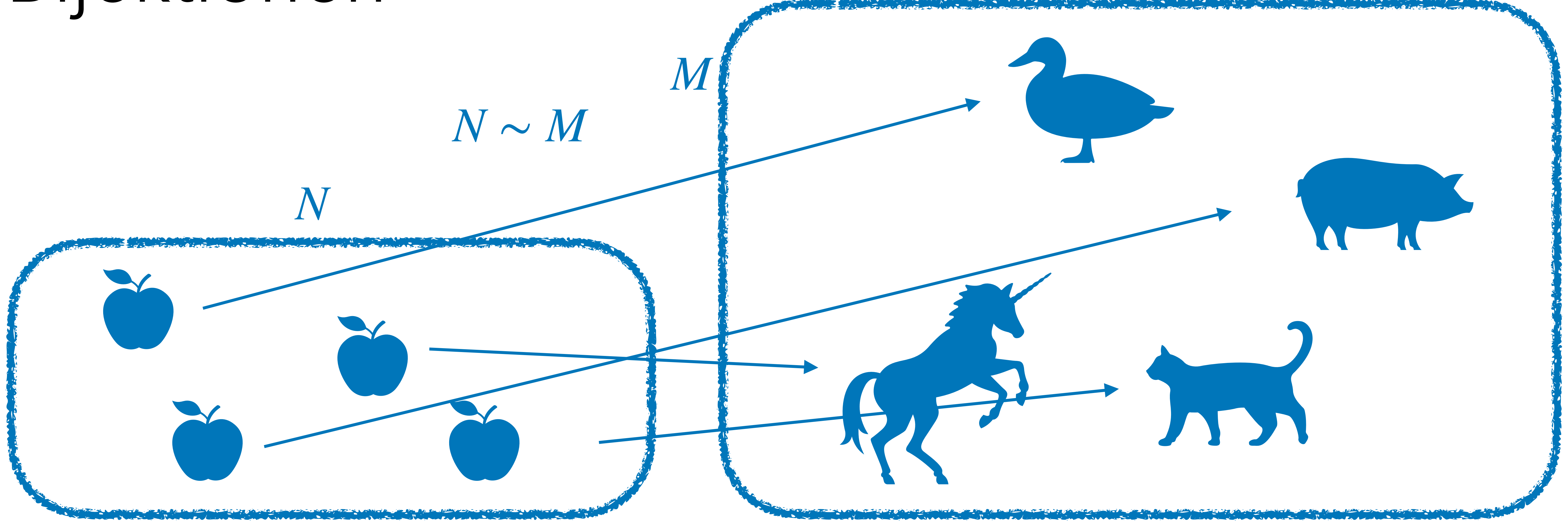
Gleichmächtigkeit als Äquivalenzrelation

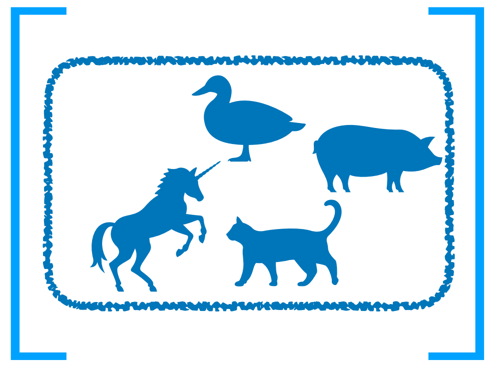
$A \sim B \Leftrightarrow \sharp A = \sharp B$

$A \sim A$

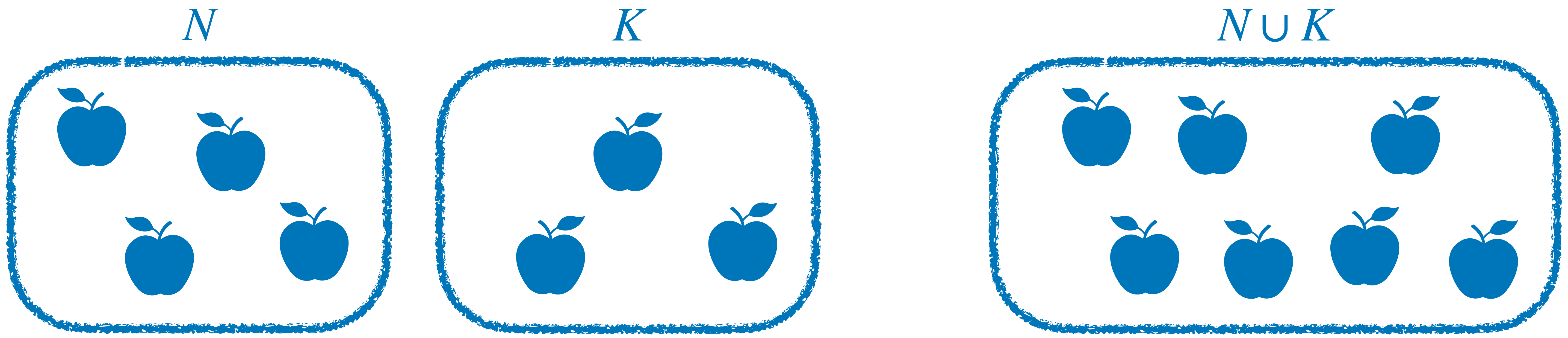
$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B \wedge B \sim C \Rightarrow A \sim C$



Äquivalenzklasse 4 = 

Addition



$$[N] + [K] = [N \cup K]$$

$$4 \quad + \quad 3 \quad = \quad 7$$

$\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}_+$?

Geordnete Paare natürlicher Zahlen: (m, n)

Äquivalenzklasse [(5,0)]	Äquivalenzklasse [(0,2)]	Äquivalenzklasse [(1,2)]	Äquivalenzklasse [(2,3)]
5	- 2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
(7, 2)	(3, 5)	(1, 2)	(2, 3)
(6, 1)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)
(5, 0)	(7, 9)	(3, 6)	(40, 60)

„Differenzengleichheit" als Äquivalenzrelation

$$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow k + n = l + m$$

„Quotientengleich" als Äquivalenzrelation

$$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow k \cdot n = l \cdot m \quad l, n \neq 0$$

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$

„Differenzengleichheit“ als Äquivalenzrelation

$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow k + n = l + m$

[(5,0)]	[(0,2)]
5	- 2
(7, 2)	(3, 5)
(6, 1)	(0, 2)
(5, 0)	(7, 9)

Addition

$(k, l) + (m, n) := (k + l, m + n)$

$4 + (-7) \triangleq (4{,}0) + (0{,}7) = (4{,}7)$

$\equiv (0{,}3) \triangleq -3$

Subtraktion

$(k, l) - (m, n) := (k, l) + (n, m)$

Ganze Zahlen (mit Addition) als abelsche Gruppe

$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, Assoziativität, Kommutativität,

neutrales Element: $\exists 0 \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z} : a + 0 = a$,

inverses Element: $\forall a \in \mathbb{Z} : \exists \tilde{a} \in \mathbb{Z} : a + \tilde{a} = 0$

dann noch Einbettung der natürlichen Zahlen und Ordnungsrelation nötig

- Ganze Zahlen können über Zahlenpaare aus den natürlichen Zahlen oder als »Gegenzahlen« der natürlichen Zahlen entwickelt werden.
- Natürliche Zahlen sind als Teilmenge in ganze Zahlen eingebettet.
- Subtraktion natürlicher Zahlen n - m mit m > n ist nun lösbar.
- Rechenregeln werden erweitert, wobei die bekannten weiter gelten.

- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

»Minus mal Minus ist Plus«

$$(-3)\cdot(-5)=15$$

Permanenzprinzip:
Beim Aufbau einer komplexen mathematischen Theorie sollen die Strukturen der zugrundeliegenden Theorie so weit wie möglich erhalten bleiben.

$$\begin{array}{rl}
2\cdot 5 = 10 & \\
 & -5 \\
1\cdot 5 = 5 & \\
 & -5 \\
0\cdot 5 = 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
2\cdot(-5) = -\,10 & \\
 & +5 \\
1\cdot(-5) = -\,5 & \\
 & +5 \\
0\cdot(-5) = 0 & \\
 & +5 \\
-1\cdot(-5) = 5 & \\
 & +5 \\
-2\cdot(-5) = 10 & \\
 & \\
-3\cdot(-5) = 15 &
\end{array}$$

»plus mal plus«

Permanenzreihe | am Kontext

»plus mal minus«

Kommutativität

Permanenzreihe

»minus mal plus«

»minus mal minus«

- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

Literatur

Ableitinger, C., Kramer, J., & Prediger, S. (Hrsg.). (2013). *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung: Ansätze zu Verknüpfungen der fachinhaltlichen Ausbildung mit schulischen Vorerfahrungen und Erfordernissen*. Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8

Beutelspacher, A., Danckwerts, R., Nickel, G., Spies, S., & Wickel, G. (2012). *Mathematik Neu Denken*. Vieweg+Teubner Verlag. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-8250-9

Danckwerts, R. (2013). Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt"! In C. Ableitinger, J. Kramer, & S. Prediger (Hrsg.), *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung* (S. 77–94). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-01360-8_5

Freudenthal, H. (1973a). *Mathematics as an Educational Task*. Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2

Freudenthal, H. (1973b). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 1). Klett.

Freudenthal, H. (1973c). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Literatur

Klein, F. (1925). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus II. Geometrie*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-90852-1

Klein, F. (1955). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus III. Präzisions- und Approximationsmathematik* (C. H. Müller, Hrsg.). Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-00246-9

Klein, F. (1967). *Elementarmathematik vom Höheren Standpunkte aus I. Arithmetik, Algebra, Analysis*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-11652-4

Wikipedia. (2021). *Peano-Axiome – Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Peano-Axiome&oldid=216675163