

Universität Potsdam – Wintersemester 2023/24

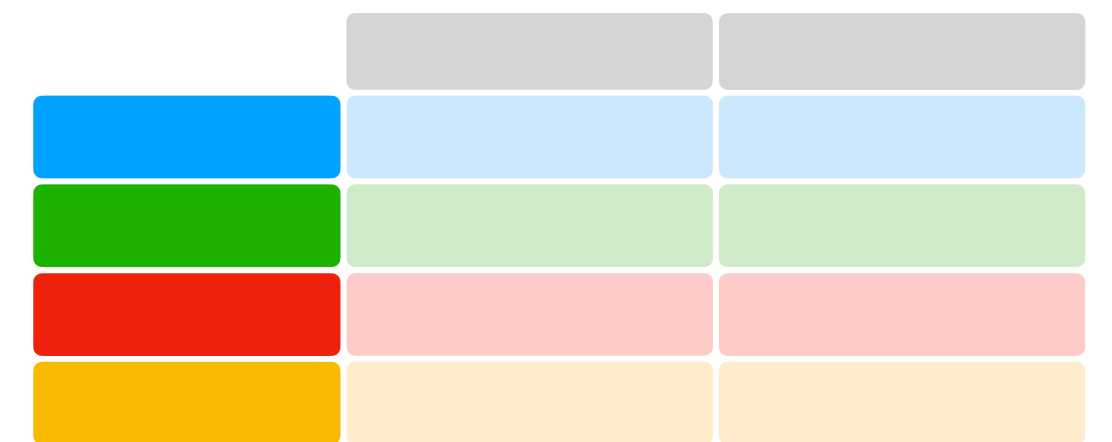
Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 1 – Vier-Ebenen-Ansatz

Stoffdidaktik Mathematik

Kapitel 1 – Vier-Ebenen-Ansatz

- Sie kennen typische Fragestellungen, um sich einer stoffdidaktischen Analyse systematisch zu nähern.
- Sie erkennen den Vier-Ebenen-Ansatz als eine Möglichkeit, eine stoffdidaktische Analyse strukturiert vorzunehmen.
- Sie können den Vier-Ebenen-Ansatz anhand eines Beispiels nachvollziehen.
- Sie sind sich der Komplexität einer stoffdidaktischen Analyse bewusst.



Satz des Pythagoras

Wie kann man den beweisen?

Negative Zahlen

Was stellt man sich darunter vor?

Zufallsexperimente

Welche Beispiele sind geeignet?

Logarithmengesetze

Wofür braucht man die?

Darauf bietet die Stoffdidaktik Mathematik Antworten!

Winkel

Was ist das eigentlich?

Tangenten am Kreis

Wie definiert man die am besten?

Rechnen mit Brüchen

Warum fällt das vielen so schwer?

Funktionen

Wie führe ist das am besten ein?

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wie kann ich das visualisieren?

Stoffdidaktik Mathematik

- Sie **kennen Aspekte und Grundvorstellungen** zu zentralen mathematischen Begriffen.
- Sie **beurteilen Unterrichtsmaterialien und Lernumgebungen** hinsichtlich ihrer stoffdidaktischen Eignung.
- Sie **erstellen Aufgaben und erste Lernumgebungen** zu konkreten Stoffgebieten.
- Sie **erkennen mathematikdidaktische Prinzipien und Ideen** als **Entscheidungs- und Strukturierungsgrundlage** zu stofflichen Inhalten der mathematischen Bildung.
- Sie **wählen zielgerichtet** analoge und digitale **Medien** zur Unterstützung stofflich orientierter Lehr-Lern-Prozesse aus.
- Sie **setzen sich** selbstständig **mit stoffdidaktischen Fragestellungen auseinander** und nutzen dafür geeignete mathematikdidaktische Literatur.
- Sie **reflektieren die Inhalte der vorangegangenen Mathematik-Fachmodule** unter stoffdidaktischen Gesichtspunkten.



Wie gestalte ich einen Lernprozess für einen konkreten mathematischen Inhalt?

Inhalt durchdringen

← **Stoffdidaktische Analyse** →

»Lernen« verstehen

Was heißt »Lernen«?

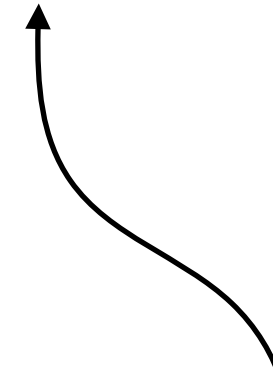


Lerngegenstände: für spezifische Ausbildungszwecke ausgewählte Ausschnitte des gesellschaftlichen Wissens und Könnens, z. B. Begriffe, Gesetzesaussagen, Methoden theoretischer und praktischer Tätigkeit, Werte, Normen, Verhaltensweisen

(Lompscher, 1985)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren



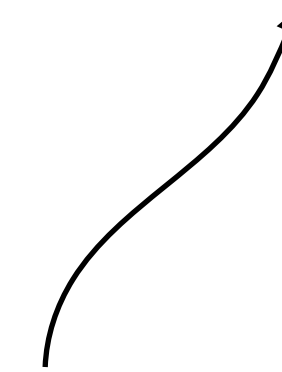
Was genau sollen Schülerinnen und Schüler bezüglich eines bestimmten mathematischen Themas lernen?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren



Wie stehen die Stoffelemente
miteinander in Verbindung und wie können
sie im Lernpfad strukturiert werden?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren

formale Ebene

Welche fachlich-logische Struktur
besitzt der Lerngegenstand?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren

formale Ebene

semantische Ebene

Welchen Sinn und welche Bedeutung
hat der mathematische Gegenstand?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren

formale Ebene

semantische Ebene

konkrete Ebene

Wie kann die Umsetzung des
Lehr-Lern-Prozesses an konkreten
Situationen gestaltet werden, so
dass mathematisches Wissen
konstruiert wird?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren

formale Ebene

semantische Ebene

konkrete Ebene

empirische Ebene

Inwieweit können kognitive und ggf. soziale Aspekte der Schülerinnen und Schüler in die stoffdidaktische Analyse integriert werden?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

formale Ebene

Spezifizieren

- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?

Strukturieren

- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren

semantische Ebene

- **Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?

- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?
- Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren

konkrete Ebene

- **Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten?
- **Welche Kontexte und Probleme** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?

- Wie kann das Verständnis sukzessive **über konkrete Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden **konstruiert** werden (*horizontale Mathematisierung*)?
- Wie können die Lernpfade **in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet** werden (*vertikale Mathematisierung*)?

(Hußmann & Prediger, 2016)

Vier-Ebenen-Ansatz

Spezifizieren

Strukturieren

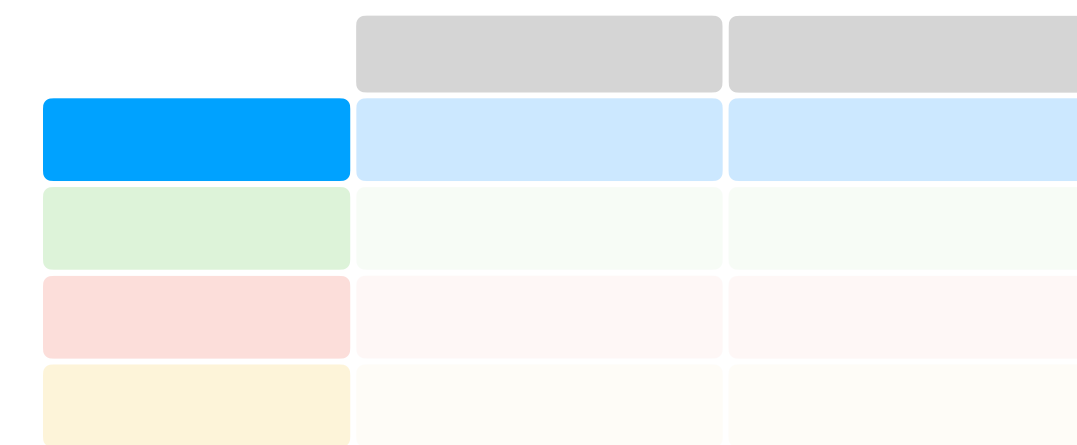
empirische Ebene

- **Welche** typischen **individuellen Voraussetzungen** (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, ...) sind zu erwarten und **wie passen** diese zum **angestrebten Verständnis** (Ressourcen vs. Hindernisse)?
- **Woher** kommen typische **Hindernisse** oder **unerwünschte Vorstellungen**?

- Wie können typische **Vorkenntnisse und Vorstellungen** als **fruchtbare Anknüpfungspunkte** dienen?
- Welche **Schlüsselstellen** (Hindernisse, Wendepunkte, ...) gibt es **im Lernweg** der Schüler/-innen?
- Wie kann der angestrebte **Lernpfad** bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen **neu angeordnet** werden?

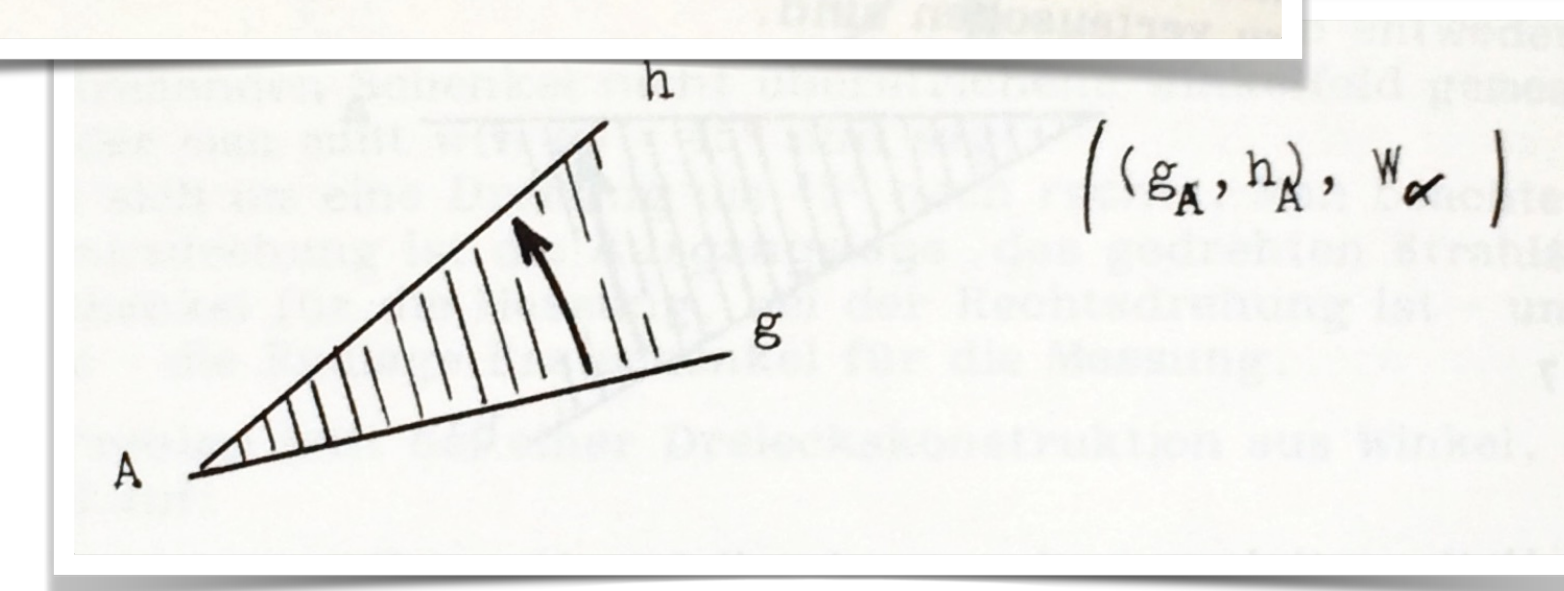
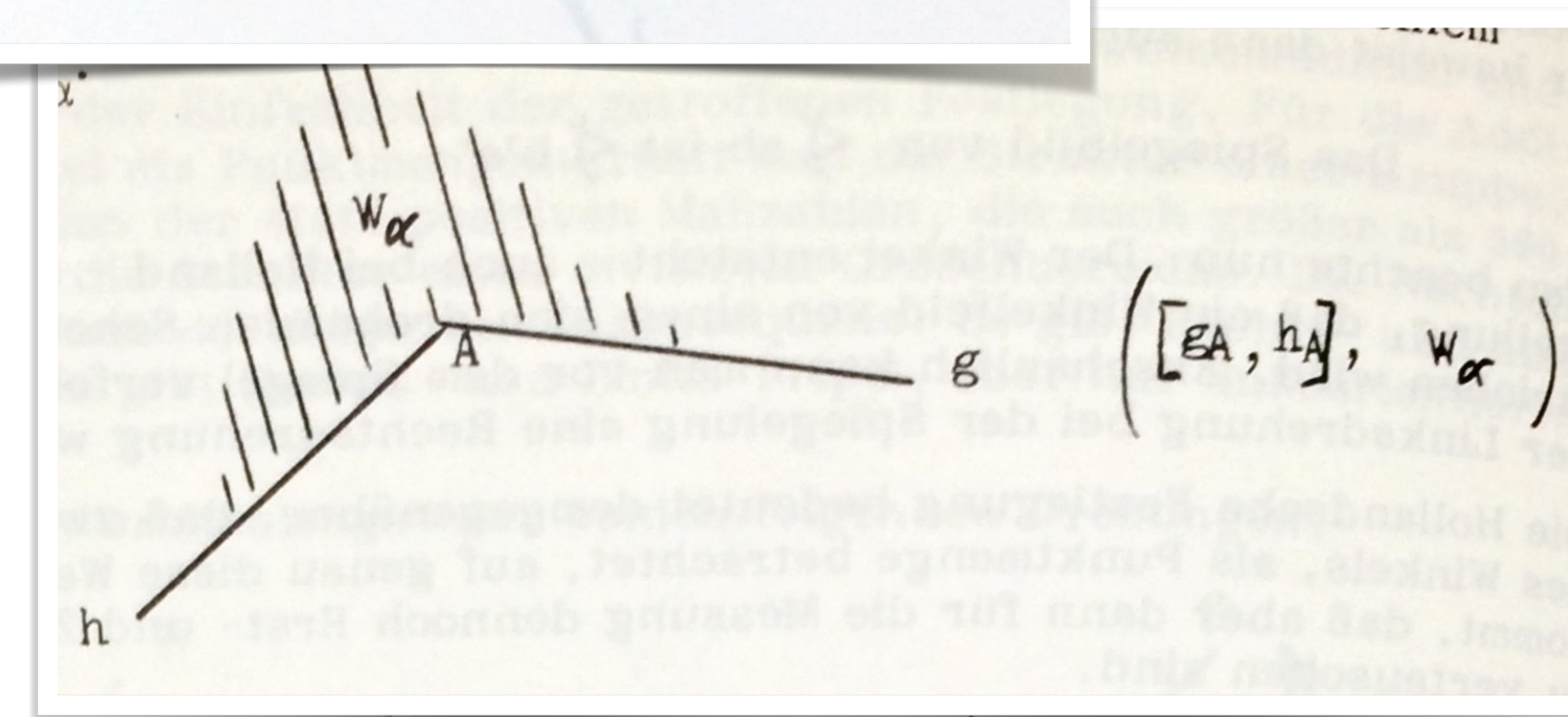
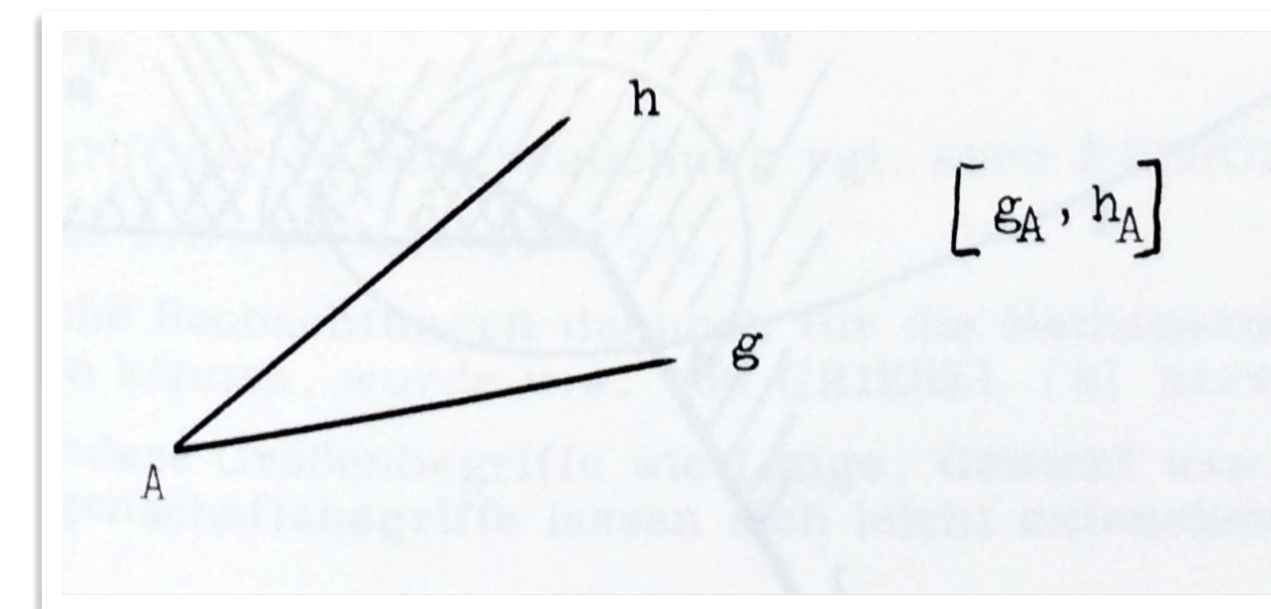
(Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Winkel



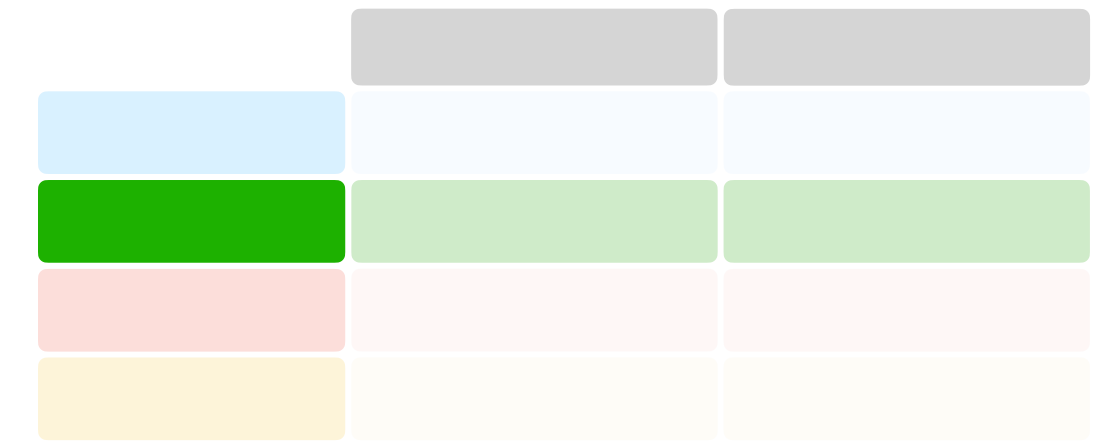
Goniometrischer	Elementar-geometrischer	Analytisch-geometrischer	Stereometrischer
<i>Winkelbegriff: Winkel eines</i>			
geordneten	ungeordneten	geordneten	ungeordneten
Paares von			
Halbgeraden	Halbgeraden	Geraden	Geraden
in			
orientierter	unorientierter	orientierter	unorientierter
<i>Ebene, bestimmt</i>			
mod 2π	zwischen 0° und 180°	mod π	zwischen 0° und 90°

(Freudenthal, 1973, S. 441)

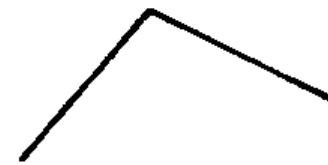


(Strehl, 1983, S. 143 f.)

Beispiel: Winkel



a) Winkel als "geknickte Gerade". (Abb.)



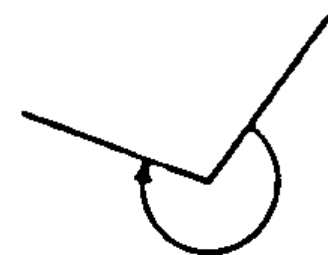
Kurz:
"Winkel ohne
(Kreis-)Bogen".

b) Winkel als Ebenenteil, der von zwei geraden Linien mit gemeinsamem Anfangspunkt begrenzt wird. Anstelle eines Bogens kann der Ebenenteil auch durch eine Schraffur angedeutet werden. (Abb.)



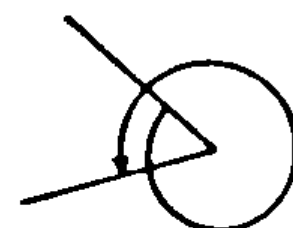
Kurz:
"Winkel mit (Kreis-)
Bogen" oder "Winkelfeld".

c) Winkel als Ebenenteil, dessen "Entstehungsgeschichte" durch die Drehung eines Schenkels beschrieben werden kann. (Abb.)



Kurz:
"Winkel mit Kreishogen-
pfeil" oder "orientier-
tes Winkelfeld".

d) Winkel als "Umlaufwinkel". Der Winkel kann als beliebige Drehung um eine Achse gesehen werden. (Abb.)



Kurz:
"Winkel mit Umdrehungs-
pfeil".

Knick, Feld, Richtungsänderung und Umdrehung

Wesentlich für die Unterscheidung der Aspekte ist die Relevanz und Bedeutung einzelner Winkelbestandteile.

Beim Knick als Abweichung von einer Geraden ist der Scheitelpunkt die Knickstelle, und die Schenkel beschreiben die jeweiligen geradlinigen Teilstücke.

Beim Feld ist der zwischen den Schenkeln befindliche Bereich der Ebene von Bedeutung, der Scheitelpunkt kann dann als »Quelle« des Feldes mit den Schenkeln als Begrenzung angesehen werden.

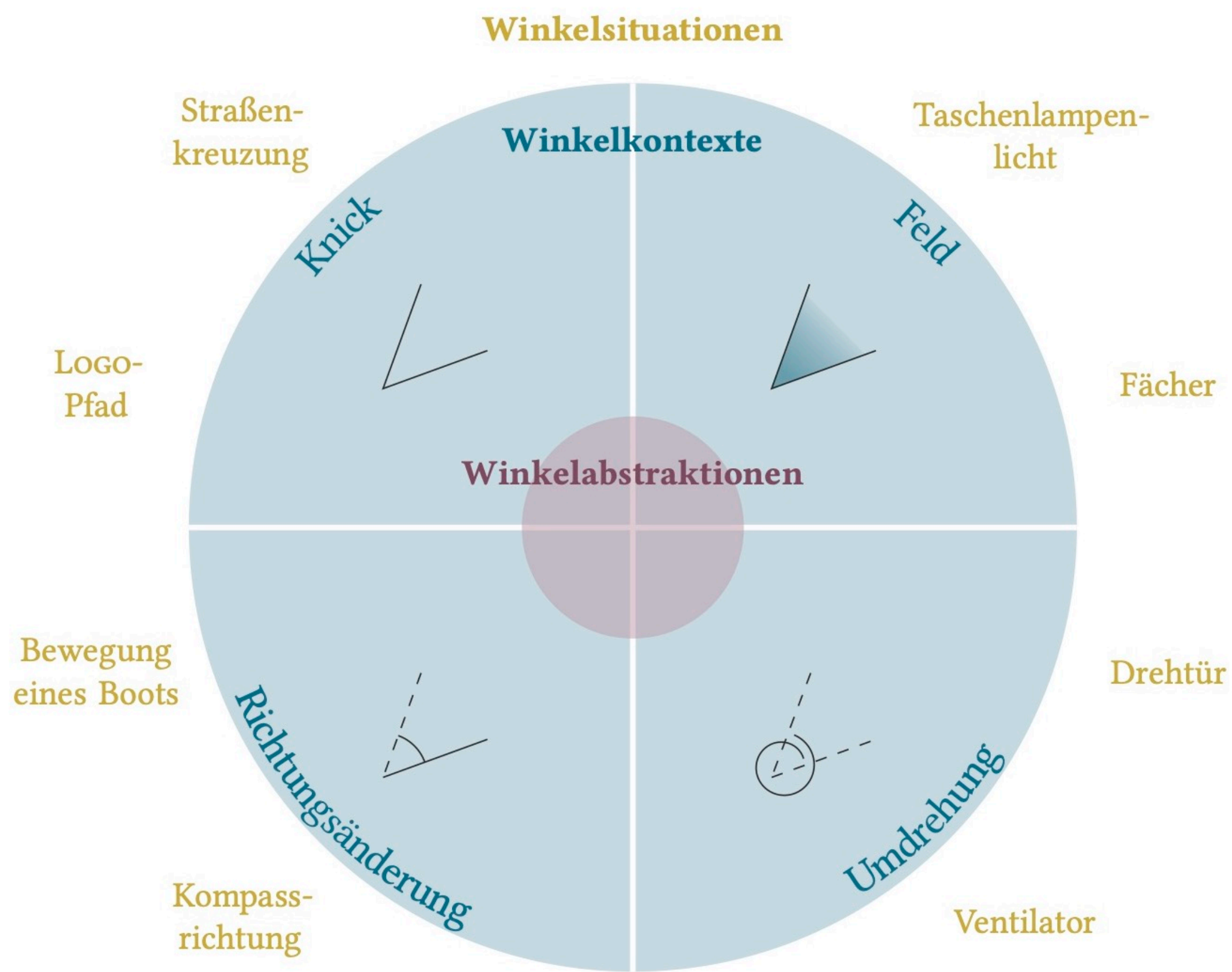
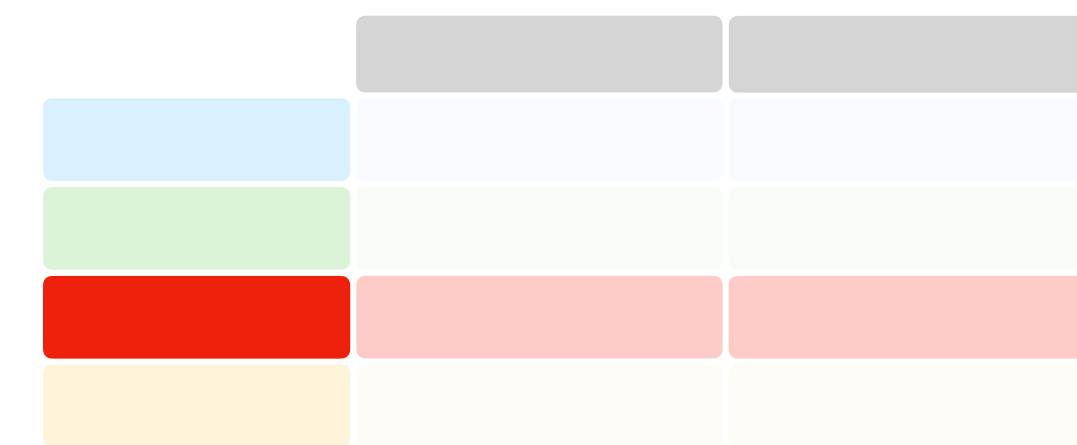
Bei einer Richtungsänderung kann der Scheitelpunkt als »Standpunkt« aufgefasst werden und die Schenkel beschreiben jeweils eine »Blickrichtung«.

Bei der Umdrehung ist der Scheitelpunkt das Drehzentrum, während die Schenkel als geometrische Objekte – also Strahlen – gar nicht eine so hohe Bedeutung erfahren. Vielmehr dienen sie als »Hilfsmittel«, den Anfangs- und Endzustand miteinander vergleichen zu können – interpretierbar als »Greifer« zur Durchführung der Drehung.

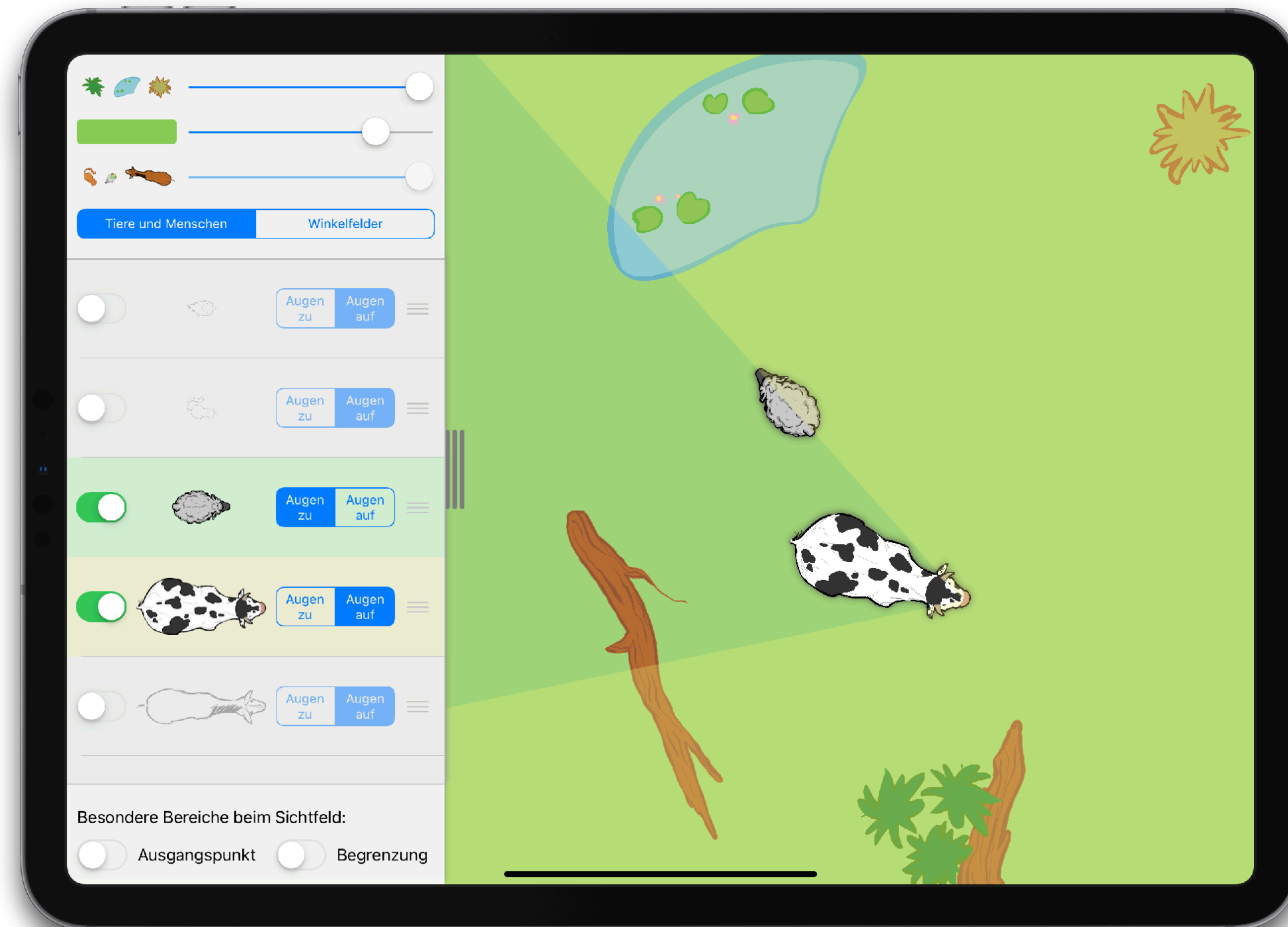
(Krainer, 1989, S. 387)

(Etzold, 2021, S. 53)

Beispiel: Winkel

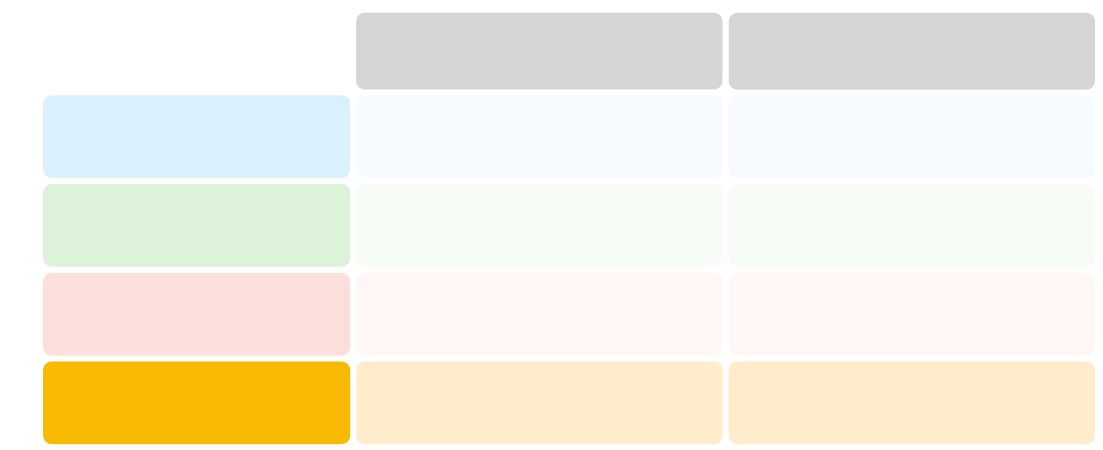


(Etzold, 2021, S. 70)



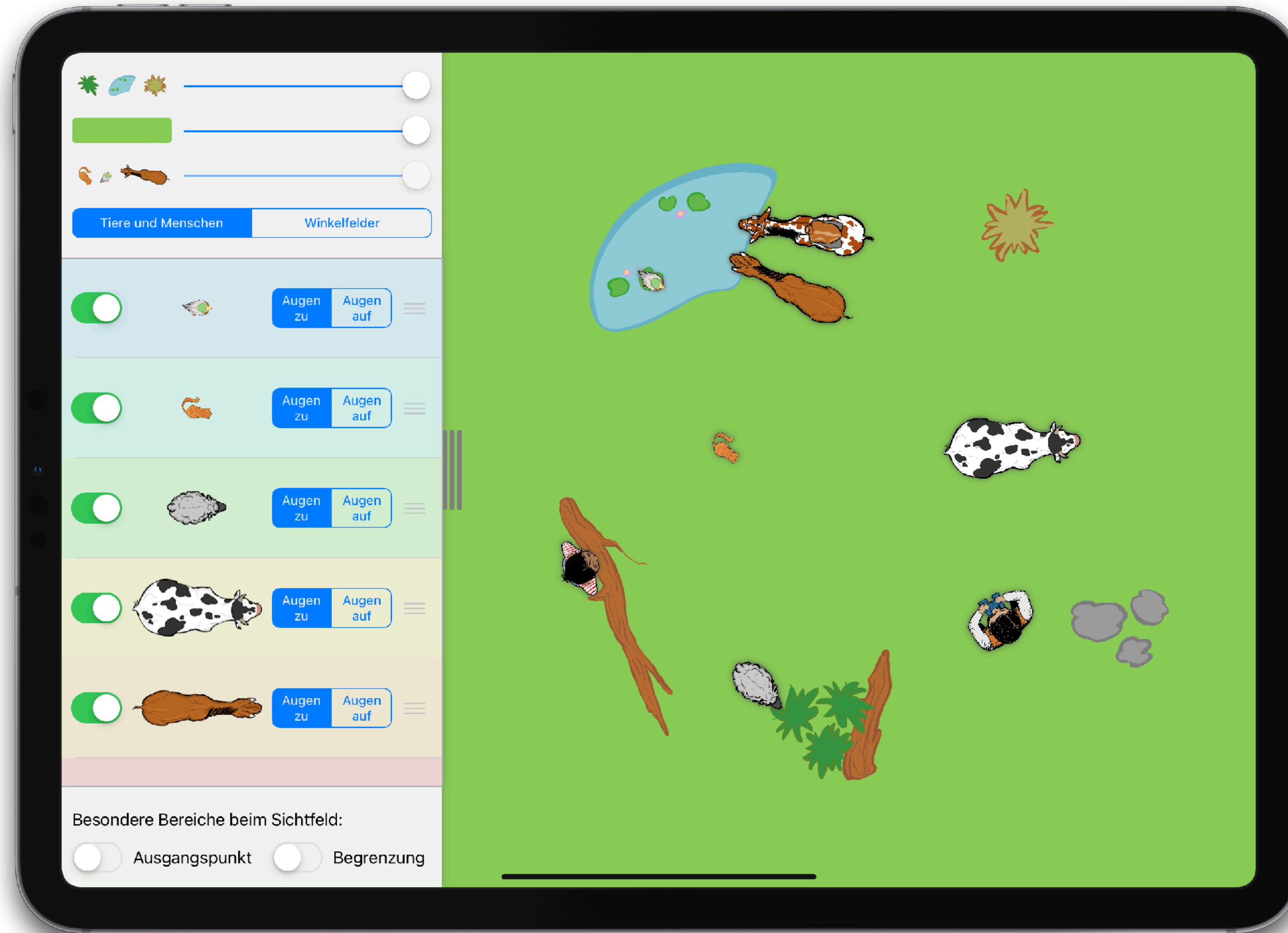
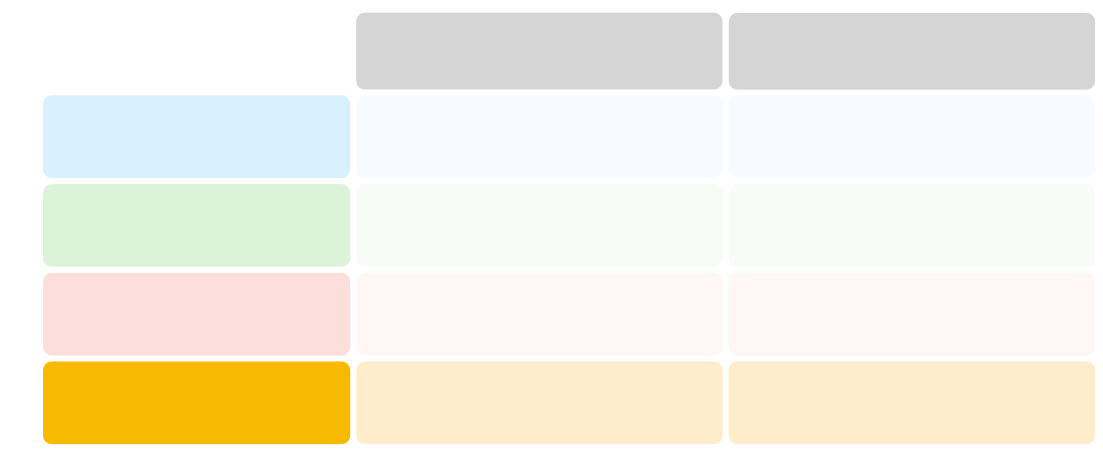
(Etzold, 2019a)

Beispiel: Winkel



(Etzold, 2019b, Foto: Christian Dohrmann)

Beispiel: Winkel



»Das Pferd soll auf dem Steinpflaster stehen, die Frau soll auf dem Pferd sitzen/stehen. Das Pferd guckt in Richtung der grünen Büsche, die Frau hat die Augen zu. Gleichzeitig versteckt sich die Katze unter der Kuh.«

(Etzold, 2021, S. 152)

Literatur

Etzold, H. (2019a). *Winkel-Farm* (Version 2) [App]. <https://apps.apple.com/de/app/winkel-farm/id1369585218>

Etzold, H. (2019b). *Winkel-Farm – Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer* (Version 2). Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.4747700>

Etzold, H. (2021). *Neue Zugänge zum Winkelbegriff* [Dissertation, Universität Potsdam]. <https://doi.org/10.25932/publishup-50418>

Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe* (Bd. 2). Klett.

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33-67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>

Krainer, K. (1989). *Lebendige Geometrie. Überlegungen zu einem integrativen Verständnis von Geometrieunterricht anhand des Winkelbegriffs* [Dissertation]. Alpen-Adria-Universität Klagenfurt.

Lompscher, J. (1985). Die Lerntätigkeit als dominierende Tätigkeit des jüngeren Schülers. In J. Lompscher (Hrsg.), *Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit* (S. 23-52). Volk und Wissen.

Mitchelmore, M. (1990). Psychologische und mathematische Schwierigkeiten beim Lernen des Winkelbegriffs. *mathematica didactica*, 13, 19-37.

Mitchelmore, M., & White, P. (1998). Development of Angle Concepts: A Framework for Research. *Mathematics Education Research Journal*, 10(3), 4-27.

Strehl, R. (1983). Anschauliche Vorstellung und mathematische Theorie beim Winkelbegriff. *mathematica didactica*, 6, 129-146.