

Stoffdidaktik Mathematik

Fundamentale Ideen

- Sie können Fundamentale Ideen über ihre Kriterien definieren.
- Sie kennen Beispiele für Fundamentale Ideen, auch über die in den Bildungsstandards beschriebenen Kompetenzen hinaus.
- Sie können bei einzelnen Unterrichtsinhalten den Zusammenhang zu zugehörigen Fundamentalen Ideen herstellen.

Fundamentale Ideen

Eine **Fundamentale Idee** bzgl. eines Gegenstandsbereichs (Wissenschaft, Teilgebiet) ist ein **Denk-, Handlungs-, Beschreibungs- oder Erklärungsschema**, das

1. in verschiedenen Gebieten des Bereichs vielfältig anwendbar oder erkennbar ist (**Horizontalkriterium**),
2. auf jedem intellektuellen Niveau aufgezeigt und vermittelt werden kann (**Vertikalkriterium**),
3. in der historischen Entwicklung des Bereichs deutlich wahrnehmbar ist und längerfristig relevant bleibt (**Zeitkriterium**),
4. einen Bezug zu Sprache und Denken des Alltags und der Lebenswelt besitzt (**Sinnkriterium**).

Schwill, 1994

Fundamentale Ideen

- Zahl
- Algorithmus
- Maß
- Raum und Form
- Funktion
- Zufall
- Kommunizieren
- Modellieren
- Argumentieren
- Problemlösen
- Darstellen
- Fragen
- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren

nach von der Bank, 2013, S. 103 und Lambert, 2012

Fundamentale Ideen

Horizontal
Vertikal
Zeit
Sinn

Spezifizieren

Strukturieren

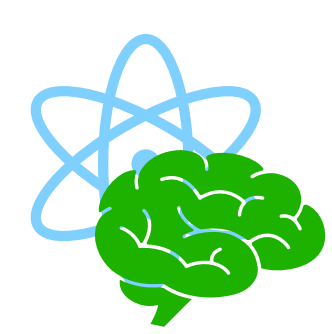
semantische Ebene

- Welche **Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- Welche **Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?

- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?
- Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

nach von der Bank, 2013, S. 103 und Lambert, 2012

nach Hußmann & Prediger, 2016



Fundamentale Ideen

- Zahl
- Algorithmus
- Maß
- Raum und Form
- Funktion
- Zufall
- Kommunizieren
- Modellieren
- Argumentieren
- Problemlösen
- Darstellen
- Fragen
- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren

- **Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?

nach Hußmann & Prediger, 2016

Beantworten Sie diese Fragen an einem Unterrichtsthema Ihrer Wahl, auch mithilfe des Rahmenlehrplanes.

nach von der Bank, 2013, S. 103 und Lambert, 2012

Beispiel: Linearität

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, sowie $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$.

f heißt in $x_0 \in U$ (total) differenzierbar, wenn es eine **lineare**

Abbildung $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und eine „Fehlerfunktion“

$r: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A(h) + r(h)$$

$$\text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

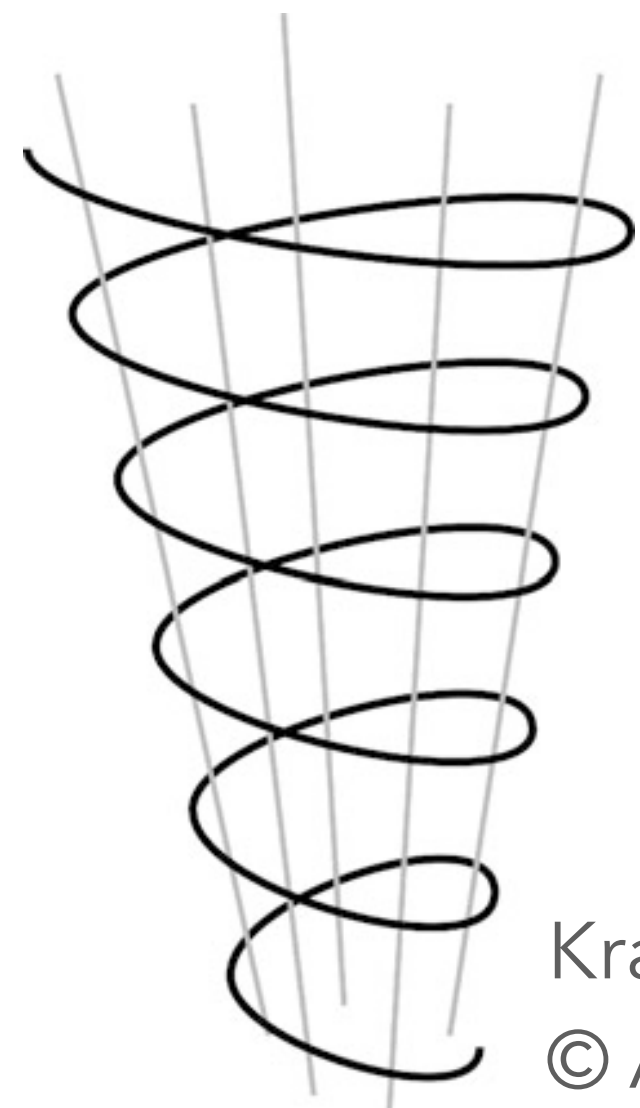
also eine Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m \times n}$
mit

$$A(h) = \mathbf{M} \cdot h \text{ für alle } h \in \mathbb{R}^n$$

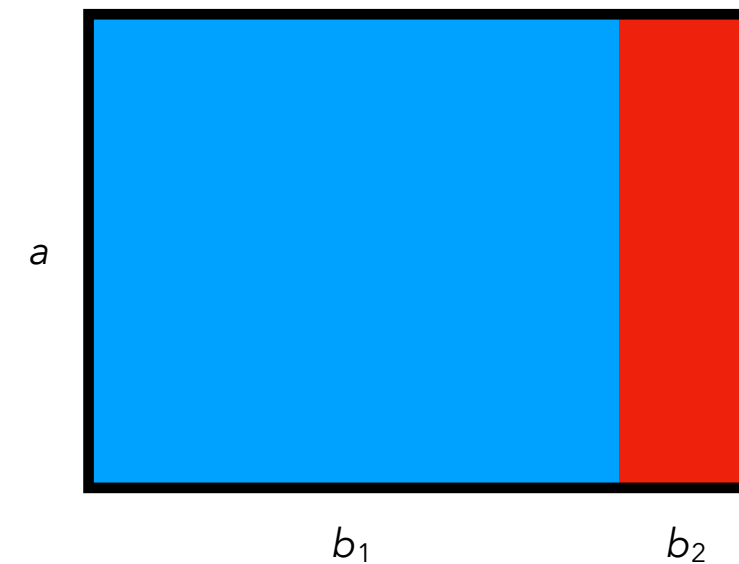
Beispiel: Linearität

»Jedes Kind kann auf jeder Entwicklungsstufe jeder Lehrgegenstand in einer intellektuell ehrlichen Form erfolgreich gelehrt werden.«

Bruner, 1976, S. 77



Krauthausen, 2018, S. 226
© A. Eicks

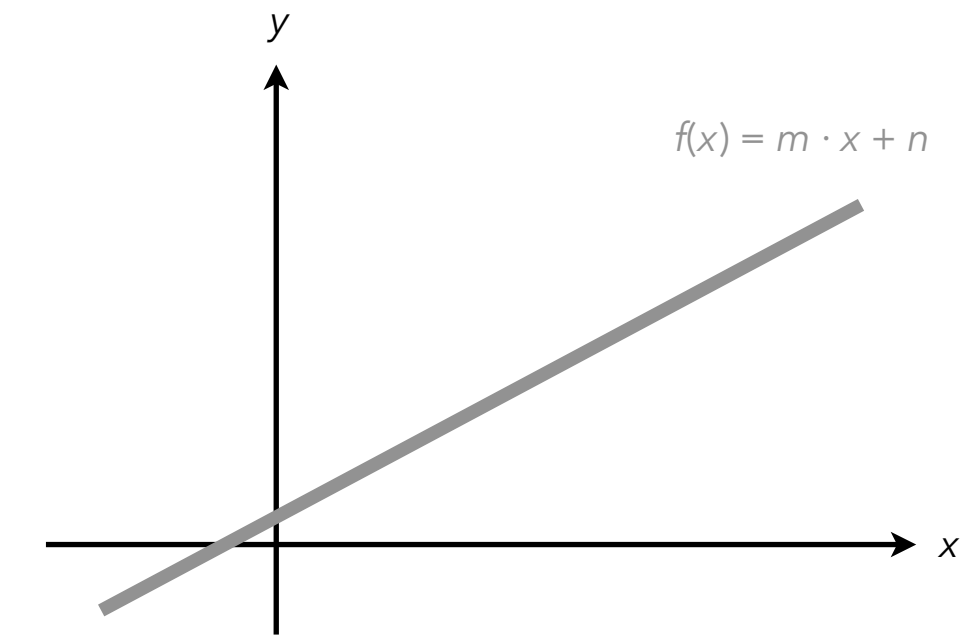


$$a \cdot (b_1 + b_2) = a \cdot b_1 + a \cdot b_2$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -4x - 3y = -7 \end{cases}$$

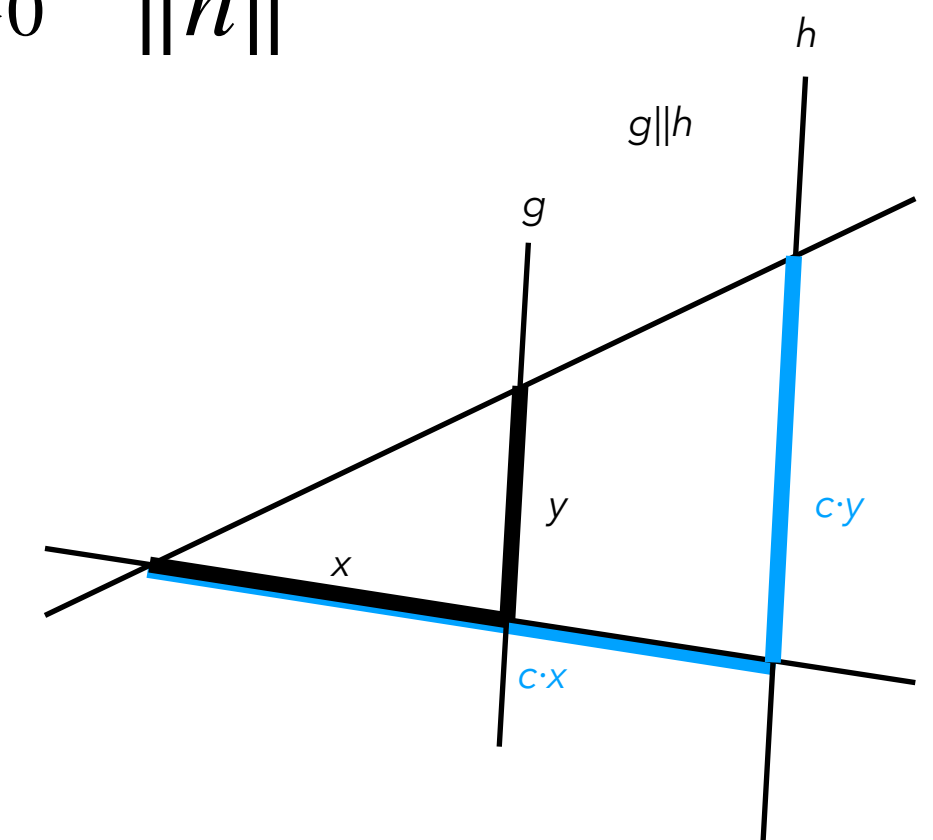
$$\sin(x) \approx x \text{ für } x \approx 0$$

Danckwerts, 1988



$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \mathbf{M} \cdot h + r(h)$$

$$\text{mit } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} = 0$$



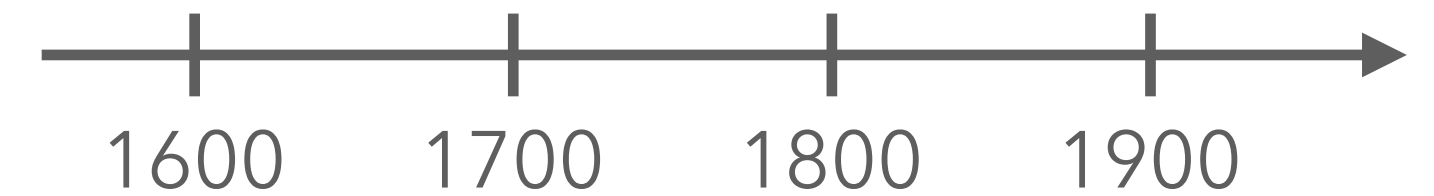
Beispiel: Linearität

Anfang 1. Jtsd. n. Chr.

Lineare Interpolation

16. Jh.

systematische Methoden zur Lösung von linearen Gleichungssystemen

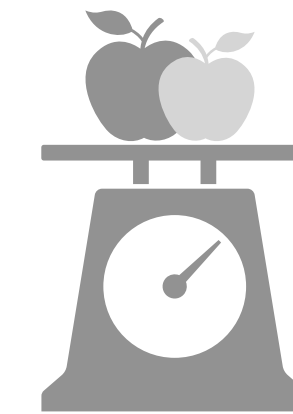


1729

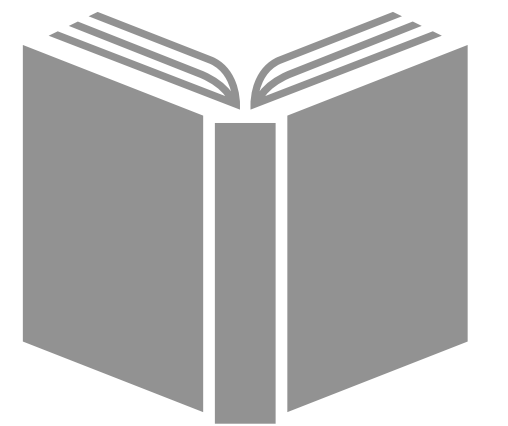
Lösung eines Systems von drei Gleichungen in drei Unbekannten

1715

Taylor: »Linear perspective«



prop. Zuordnungen im Alltag



lineare Erzählung

1750

Lösung regulärer linearer Gleichungssysteme in zwei, drei und vier Unbekannten

17./18. Jh.

$(m \times n)$ -Schreibweise als abkürzende Schreibweise für eine lineare Substitution

1850

$(m \times n)$ -Schema als Matrix



lineares Fernsehen

18./19. Jh.

Gauß-Algorithmus

Tietze et. al, 2000, S. 73 ff. und Brückler, 2018, S. 39, 107, 119

Beispiel: Linearität

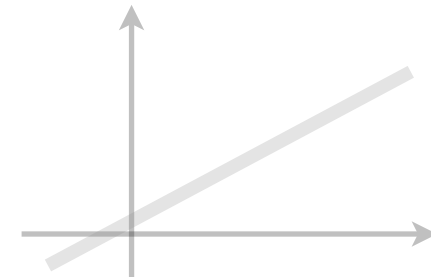
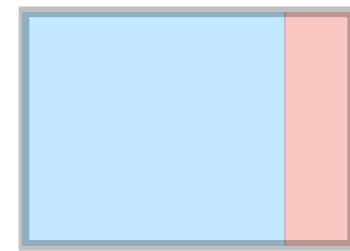
vertikal



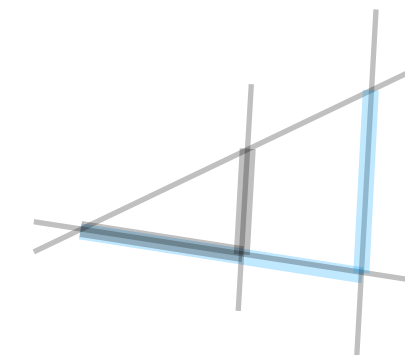
Krauthausen, 2018, S. 226

© A. Eicks

horizontal



$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -4x - 3y = -7 \end{cases}$$



$$\sin(x) \approx x \text{ für } x \approx 0$$

historisch

Anfang 1. Jtsd. n. Chr.

Lineare Interpolation

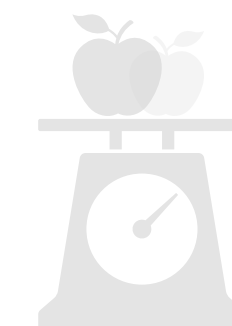
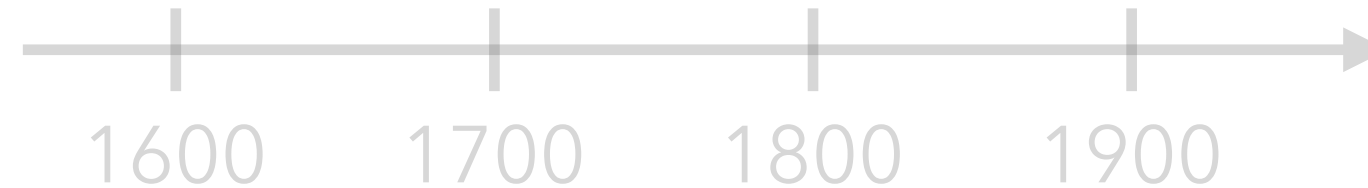
1715

Taylor: »Linear perspective«

18./19. Jh.

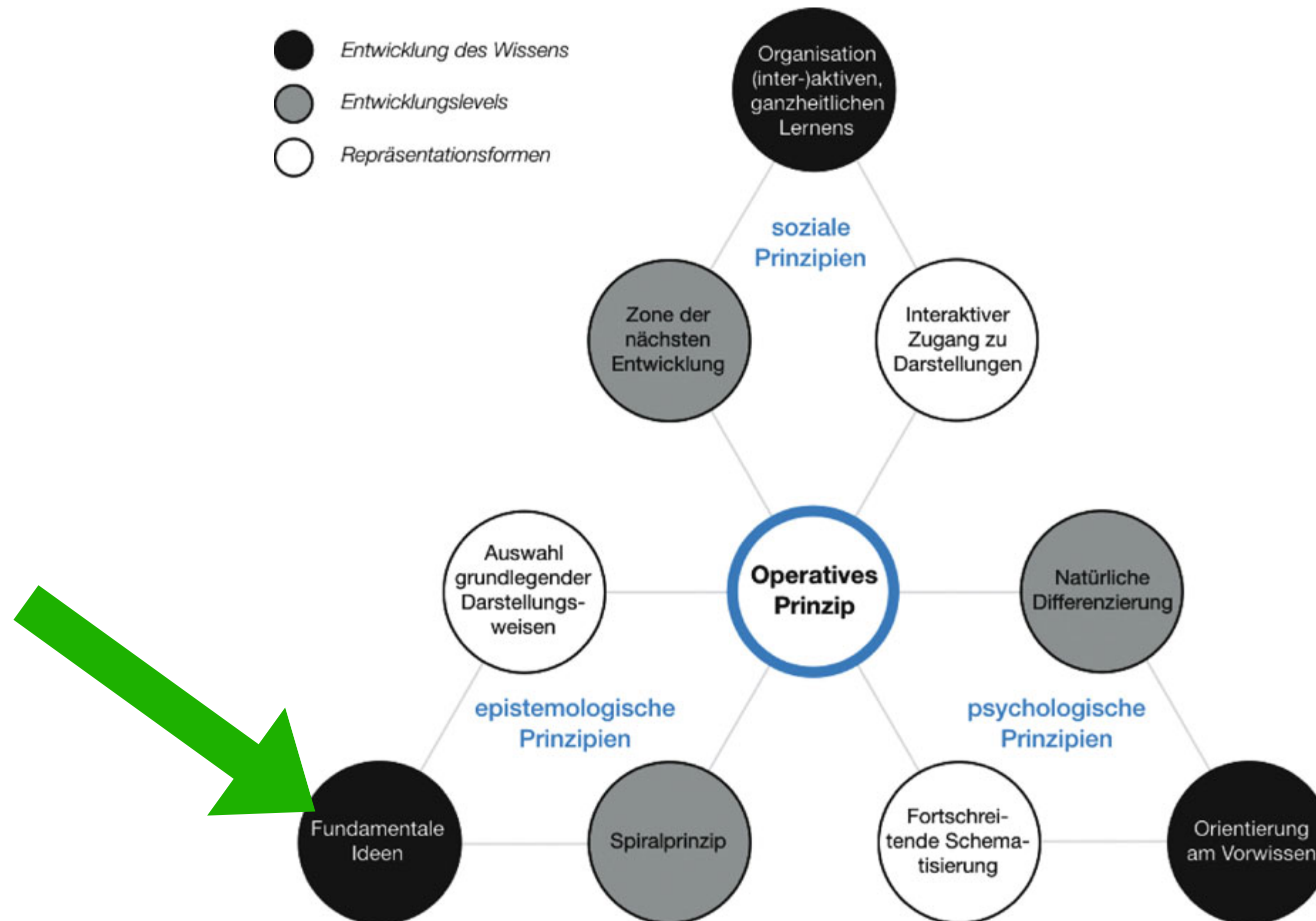
Gauß-Algorithmus

sinnvoll



fundamental!

Einordnung des Themas „Fundamentale Ideen“



Krauthausen, 2018, S. 220

- Brückler, F. M. (2018). *Geschichte der Mathematik kompakt: Das Wichtigste aus Analysis, Wahrscheinlichkeitstheorie, angewandter Mathematik, Topologie und Mengenlehre*. Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-55574-3>
- Bruner, J. S. (1976). Die Bedeutung der Struktur im Lernprozeß. In A. Holtmann (Hrsg.), *Das sozialwissenschaftliche Curriculum in der Schule: Neue Formen und Inhalte* (S. 77-90). VS Verlag für Sozialwissenschaften. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-85275-5>
- Danckwerts, R. (1988). Linearität als organisierendes Element zentraler Inhalte der Schulmathematik. *Didaktik der Mathematik*, 16(2), 149-160.
- Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 37(S1), 33-67. <https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8>
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (F. Padberg & A. Büchter, Hrsg.; Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>
- Lambert, A. (2012). *Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-)unterricht* [Vortrag]. Eingangsstatement zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken. https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/einrichtung/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_für_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf
- Lompscher, J. (1996). *Aufsteigen vom Abstrakten zum Konkreten - Lernen und Lehren in Zonen der nächsten Entwicklung*. Übersetzung eines Referats auf dem Symposium »Die ZdnE: Beziehungen zwischen Erziehung und Entwicklung« im Rahmen der 2. Internationalen Konferenz zur soziokulturellen Forschung, Genf, 11.-15. September 1996. <https://publishup.uni-potsdam.de/opus4-ubp/frontdoor/deliver/index/docId/444/file/AUFSTEIG.pdf>

- Schwill, A. (1994). *Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik*. Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht und Informatik, Wolfenbüttel. <http://www.informatikdidaktik.de/didaktik/Forschung/Wolfenbuettel94.pdf>
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003*. Luchterhand. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf
- Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2012). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife*. https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf
- Tietze, U.-P., Klika, M., & Wolpers, H. (Hrsg.). (2000b). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II. Band 2: Didaktik der Analytischen Geometrie und Linearen Algebra*. Vieweg+Teubner Verlag. <https://doi.org/10.1007/978-3-322-86479-6>
- von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83-124). Franzbecker. <https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2012.pdf>