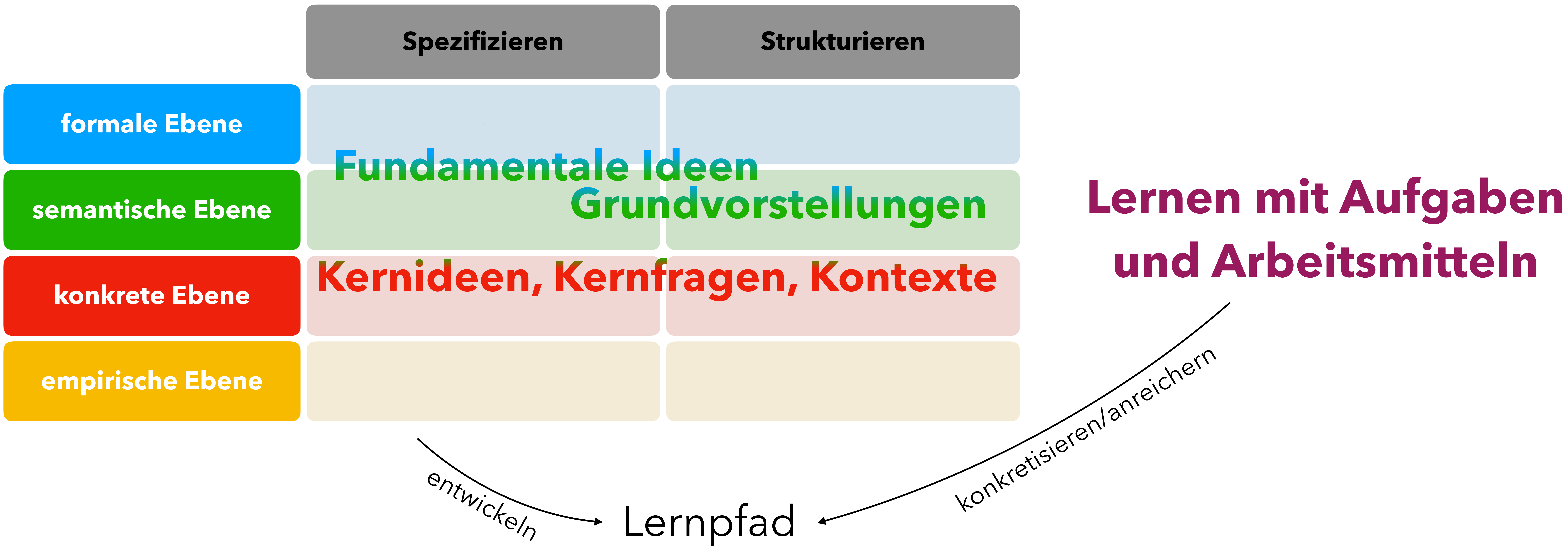
Stoffdidaktik Mathematik
Zweites Intermezzo: Ganze Zahlen

- Sie vertiefen am Beispiel ganzer Zahlen Ihr Verständnis über den Vier-Ebenen-Ansatz, insbesondere wie aus den Ebenen heraus Rückschlüsse zum Aufbau eines Lernpfades entwickelt werden können.

Beispiel: Ganze Zahlen



Beispiel: Ganze Zahlen

Erst mal $\mathbb{N}$ …

Peano-Axiome

1. 0 ist eine natürliche Zahl.
2. Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
3. 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.
4. Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5. Enthält die Menge X die 0 und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n', so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

0	$0'$	$0''$	$0'''$	…							
null	eins	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	zehn	elf
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…	

Addition

$n + k$ ist der k-fache Nachfolger von n

formal:

$n + 0 = n$

$n + k' = (n + k)'$ $\quad 1 + 1 = 1 + 0' = (1 + 0)' = 1' = 2$

Ordnungsrelation

$n < m \Longleftrightarrow \exists\, k\colon m = n + k$

Subtraktion

$m - n = k \Longleftrightarrow n + k = m$

Multiplikation

$n \cdot 1 = n$

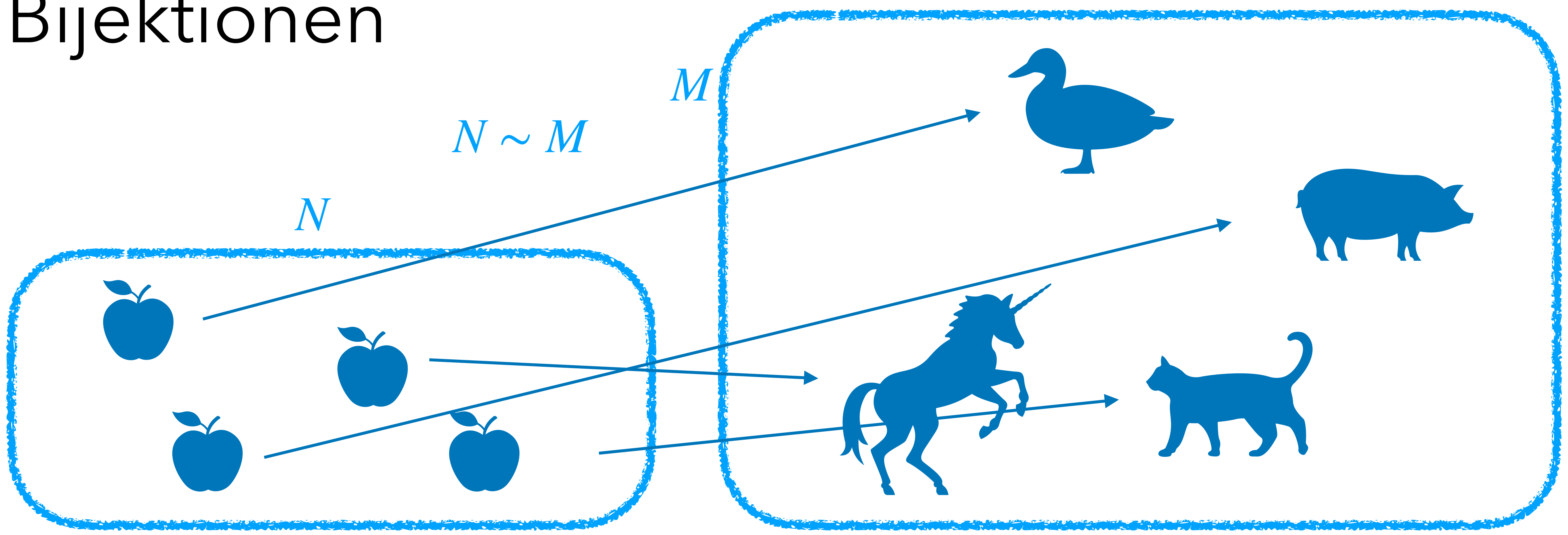
$n \cdot k' = n \cdot k + n$

(Wikipedia, 2021)

Beispiel: Ganze Zahlen

Erst mal $\mathbb{N}$ …

Mächtigkeit von Mengen über Bijektionen



Gleichmächtigkeit als Äquivalenzrelation

$A \sim B \Leftrightarrow \sharp A = \sharp B$

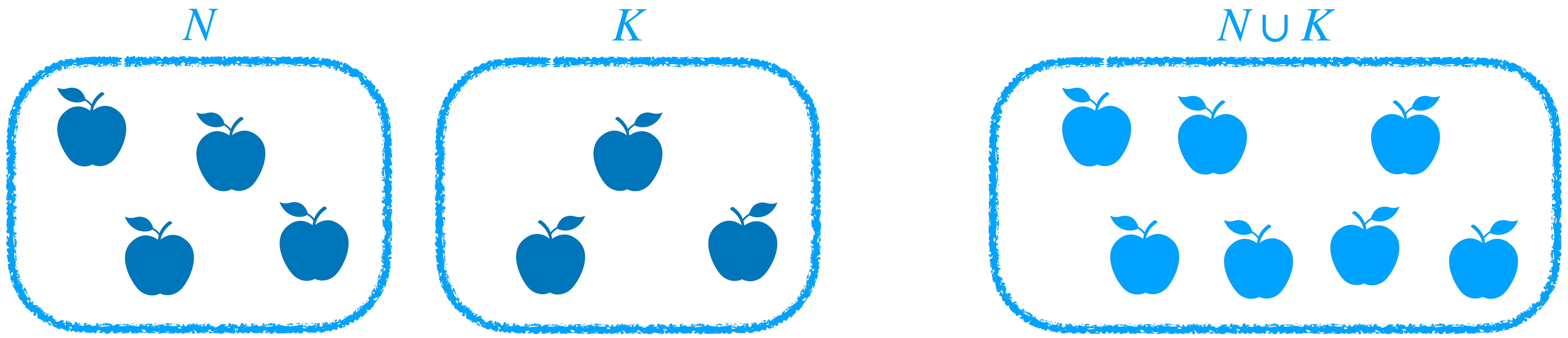
$A \sim A$

$A \sim B \Rightarrow B \sim A$

$A \sim B \land B \sim C \Rightarrow A \sim C$

Äquivalenzklasse [4] 4

Addition



$[4] \cup [3] = [7]$ $4 + 3 = 7$

Beispiel: Ganze Zahlen

$\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Q}_+$: Geordnete Paare natürlicher Zahlen

Äquivalenzklasse [(5,0)]	Äquivalenzklasse [(0,2)]	Äquivalenzklasse [(1,2)]	Äquivalenzklasse [(2,3)]
5	- 2	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$
(7, 2)	(3, 5)	(1, 2)	(2, 3)
(6, 1)	(0, 2)	(2, 4)	(4, 6)
(5, 0)	(7, 9)	(3, 6)	(40, 60)

„Differenzengleichheit" als Äquivalenzrelation

$$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow k + n = l + m$$

„Quotientengleich" als Äquivalenzrelation

$$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow k \cdot n = l \cdot m \quad l, n \neq 0$$

Beispiel: Ganze Zahlen

„Differenzengleichheit“ als Äquivalenzrelation

$(k, l) \sim (m, n) \Leftrightarrow k + n = l + m$

[(5,0)]	[(0,2)]
5	- 2
(7, 2)	(3, 5)
(6, 1)	(0, 2)
(5, 0)	(7, 9)

Addition

$(k, l) + (m, n) = (k + l, m + n)$

$4 + (-7) \triangleq (4{,}0) + (0{,}7) = (4{,}7)$

$\equiv (0{,}3) \triangleq -3$

Subtraktion

$(k, l) - (m, n) = (k, l) + (n, m)$

Ganze Zahlen (mit Addition) als abelsche Gruppe

$+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, Assoziativität, Kommutativität,

neutrales Element: $\exists 0 \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z} : a + 0 = a$,

inverses Element: $\forall a \in \mathbb{Z} : \exists \tilde{a} \in \mathbb{Z} : a + \tilde{a} = 0$

dann noch Einbettung der natürlichen Zahlen und Ordnungsrelation nötig

- Ganze Zahlen können über Zahlenpaare aus den natürlichen Zahlen oder als »Gegenzahlen« der natürlichen Zahlen entwickelt werden.
- Natürliche Zahlen sind als Teilmenge in ganze Zahlen eingebettet.
- Subtraktion natürlicher Zahlen *n* - *m* mit *m* > *n* ist nun lösbar.
- Rechenregeln werden erweitert, wobei die bekannten weiter gelten.

- **Welche Begriffe** und **Sätze** sollen erarbeitet werden?
- **Welche Verfahren** sollen erarbeitet werden und **wie** werden sie **formal begründet**?
- Wie lassen sich die Begriffe, Sätze, Begründungen und Verfahren **logisch strukturieren**?
- Welche **Verbindungen** zwischen den Fachinhalte sind entscheidend, welche weniger bedeutsam?
- Wie kann das **Netzwerk** aus Begriffen, Sätzen, Begründungen und Verfahren entwickelt werden?

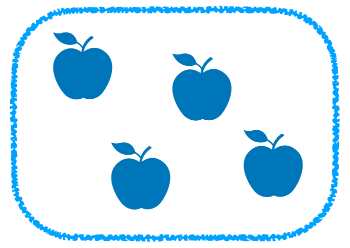
(nach Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Ganze Zahlen

Typische Schwierigkeiten

- Vielfältige Interpretation des Minus-Zeichens: Vor-, Rechen- und Inversionszeichen
- Kardinalzahlaspekt nicht mehr tragfähig, Ordinalzahlaspekt eingeschränkt tragfähig, Maßzahlaspekt im Prinzip erweiterbar
- Fehlinterpretation der Ordnungsrelation (nicht mehr über Mächtigkeit möglich; fehlerhafte spiegelbildliche Interpretation)

$-5+2$ $\quad 7-3$ $\quad -a$



1. → 2. → 3. → 4.

$-5 > -3$

Normative (Grund-)Vorstellungen

Negative Zahlen als

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen

Handlungserfahrungen
Repräsentationen
Anwendung auf Realität

(vom Hofe & Hattermann, 2014)

Beispiel: Ganze Zahlen

Normative (Grund-)Vorstellungen

Handlungserfahrungen
Repräsentationen
Anwendung auf »Realität«

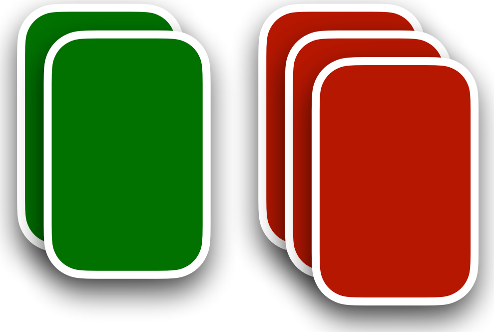
Negative Zahlen als

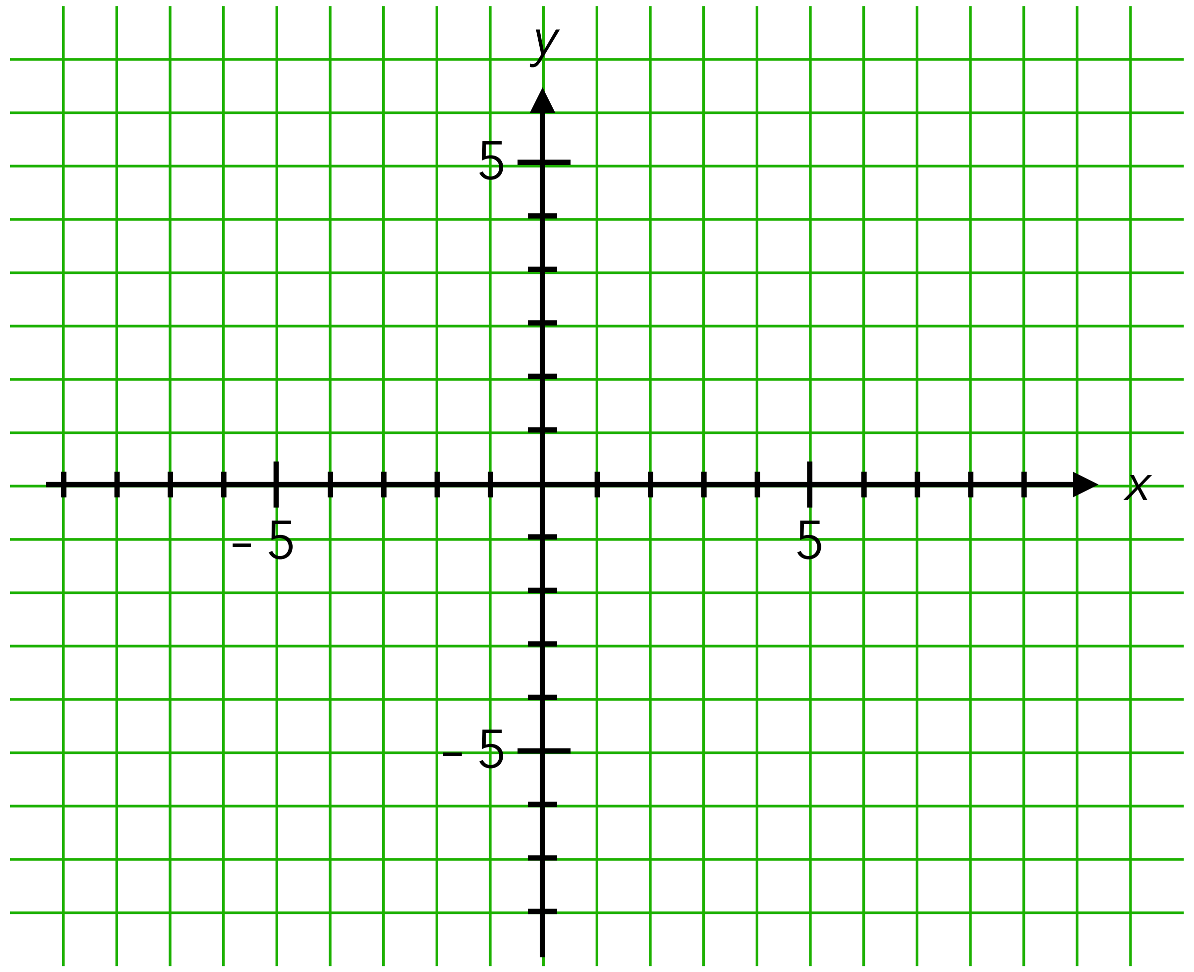
- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen

Eckhard Henkel, https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Außenthermometer?uselang=de#/media/File:2014-07-24_Außenthermometer_(2012)_von_Michael_Sailstorfer_IMG_5656.jpg, CC BY-SA 3.0 DE

Guthaben: 5 €
Schulden: – 5 €

$|-5| = 5$





	Kontobewegung	Kontostand
		50,00 €
Taschengeld von Oma	5,00 €	55,00 €
Kinoeintritt	-8,00 €	47,00 €
Popcorn	-3,00 €	44,00 €
		44,00 €

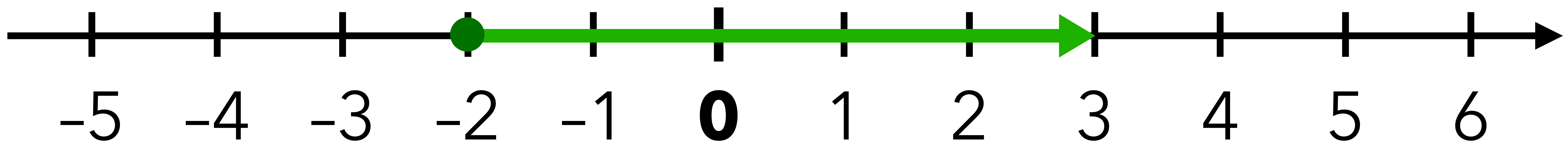
Beispiel: Ganze Zahlen

Normative (Grund-)Vorstellungen

Handlungserfahrungen
Repräsentationen
Anwendung auf »Realität«

Negative Zahlen als

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen



Addieren/Subtrahieren als

- Pfeilanlegen
- gerichtetes Weiter-/ Zurückzählen
- Subtraktion/Addition der Gegenzahl

Multiplizieren als

- Strecken/Stauchen des Pfeils (pos. Zahl)
- Spiegeln an der Null (– 1)
- Kombination aus beidem

Größenvergleich als

- direkter Lagevergleich auf Zahlengeraden (links < rechts)
- Lage- und Betragsvergleich (neg. < pos. & betragsabhängig)

(vom Hofe & Hattermann, 2014, S. 4)

Beispiel: Ganze Zahlen

Fundamentale Ideen

- Approximierung
- Optimierung
- Linearität
- Symmetrie
- Invarianz
- Rekursion
- Vernetzung
- Ordnen
- Strukturierung
- Formalisierung
- Exaktifizierung
- Verallgemeinern
- Idealisieren
- **Erweitern**

(von der Bank, 2013, S. 103; Lambert, 2012)

$\mathbb{N}$ $\mathbb{Q}_+$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$ $\mathbb{C}$

$$(-3) \cdot (-5) = 15$$

$x^{m+n} = x^m \cdot x^n$ $\quad$ $x^{a+b} = x^a \cdot x^b$

$m, n \in \mathbb{N}$ $\quad$ $a, b \in \mathbb{R}$

$$a^0 = 1$$

Permanenzprinzip und Permanenzreihen

- **Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?
- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?
- Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

(nach Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Ganze Zahlen

Permanenzprinzip und Permanenzreihen

Beim Aufbau einer komplexen mathematischen Theorie sollen die Strukturen der zugrundeliegenden Theorie so weit wie möglich erhalten bleiben.

$$(-3)\cdot(-5) = 15$$

$$\begin{aligned}
2\cdot(-5) &= -10 \\
&\quad +5 \\
1\cdot(-5) &= -5 \\
&\quad +5 \\
0\cdot(-5) &= 0 \\
&\quad +5 \\
-1\cdot(-5) &= \\
&\quad +5 \\
-2\cdot(-5) &=
\end{aligned}$$

- **Welche Fundamentalen Ideen** liegen hinter den Begriffen, Sätzen und Verfahren?
- **Welche Grundvorstellungen und Repräsentationen** (graphisch, verbal, numerisch und algebraisch) sind für den Verständnisaufbau entscheidend?
- Wie **verhalten** sich Ideen und Vorstellungen **zueinander** und **zu früheren und späteren Lerninhalten**?
- Wie kann ein **Lernpfad angeordnet** werden, in dem das Verständnis, zusammen mit den Erkenntnissen der formalen Ebene, aufgebaut wird?

(nach Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Ganze Zahlen

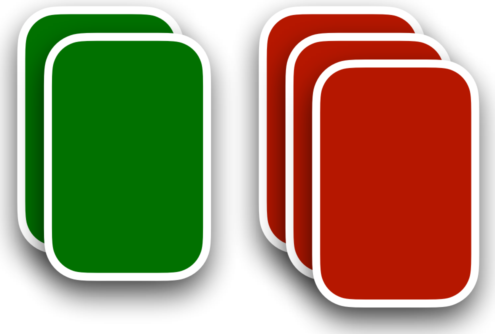
Kernidee/Kernfrage

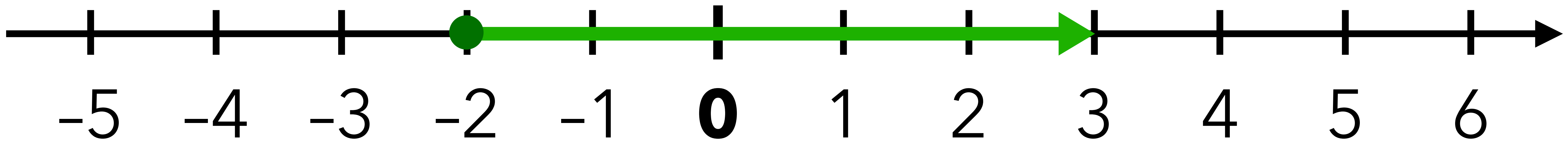
Vorschauperspektive
Rückschauperspektive

- Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?
- Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

- Ganze Zahlen können über Zahlenpaare aus den natürlichen Zahlen oder als »Gegenzahlen« der natürlichen Zahlen entwickelt werden.
- Natürliche Zahlen sind als Teilmenge in ganze Zahlen eingebettet.
- Subtraktion natürlicher Zahlen $n - m$ mit $m > n$ ist nun lösbar.
- Rechenregeln werden erweitert, wobei die bekannten weiter gelten.

- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen





- **Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten?
- **Welche Kontexte und Probleme** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?
- Wie kann das Verständnis sukzessive **über konkrete Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden **konstruiert** werden (*horizontale Mathematisierung*)?
- Wie können die Lernpfade **in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet** werden (*vertikale Mathematisierung*)?

(nach Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Ganze Zahlen

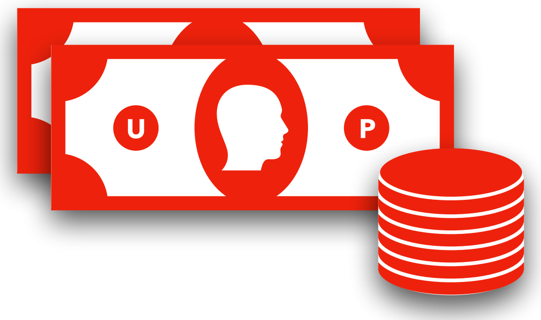
Kernidee/Kernfrage

Vorschauperspektive
Rückschauperspektive

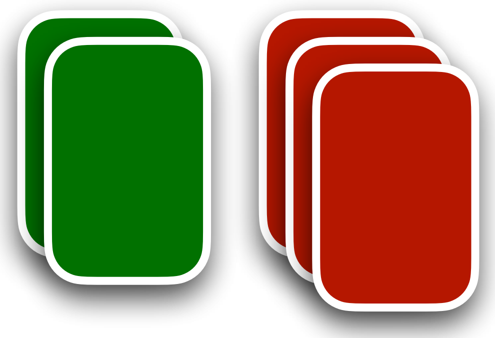
- Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?
- Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

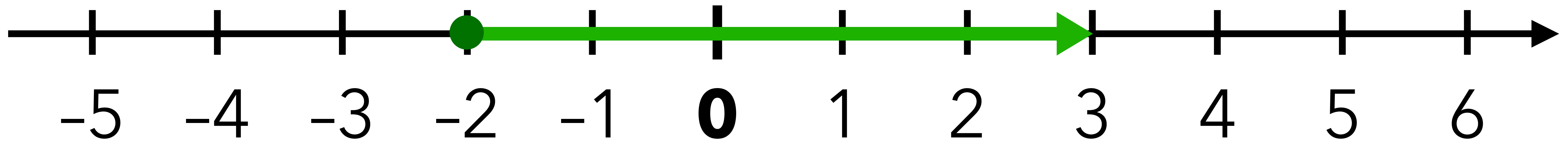
Kontext

Lebensweltbezug
Kontextauthentizität
Reichhaltigkeit



- relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke
- Gegensätze
- Richtungen
- Zustände und Zustandsänderungen



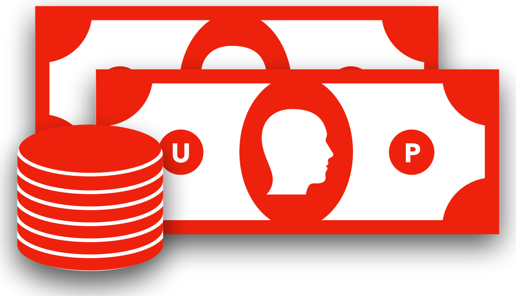


- **Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten?
- **Welche Kontexte und Probleme** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?
- Wie kann das Verständnis sukzessive **über konkrete Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden **konstruiert** werden (*horizontale Mathematisierung*)?
- Wie können die Lernpfade **in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet** werden (*vertikale Mathematisierung*)?

(nach Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Ganze Zahlen

- Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?
- Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?



Horizontale/Vertikale Mathematisierung

Blick- und Bewegungsrichtungen auf Zahlengeraden

7	–	2	(positive Zahl) – (positive Zahl)	**h** Geldzu- und -abflüsse
– 2	+	7	(negative Zahl) + (positive Zahl)	
– 2	–	7	(negative Zahl) – (positive Zahl)	
7	+	(– 2)	(positive Zahl) + (negative Zahl)	**(v)** Pfeile auf Zahlengerade, Permanenzreihen
7	–	(– 2)	(positive Zahl) – (negative Zahl)	
– 2	+	(– 7)	(negative Zahl) + (negative Zahl)	
– 2	+	(– 7)	(negative Zahl) – (negative Zahl)	
2	·	(– 7)	(positive Zahl) · (negative Zahl)	**h** mehrfache Schulden
– 2	·	7	(negative Zahl) · (positive Zahl)	**v** Kommutativität
– 2	·	(– 7)	(negative Zahl) · (negative Zahl)	**v** Permanenzreihen

- **Welche Kernfragen und Kernideen** können die Entwicklung der Begriffe, Sätze und Verfahren leiten?
- **Welche Kontexte und Probleme** sind geeignet, um an ihnen die Kernfragen und -ideen exemplarisch zu behandeln und die Inhalte zu rekonstruieren?
- Wie kann das Verständnis sukzessive **über konkrete Situationen** in den beabsichtigten Lernpfaden **konstruiert** werden (*horizontale Mathematisierung*)?
- Wie können die Lernpfade **in Bezug auf die Problemstruktur angeordnet** werden (*vertikale Mathematisierung*)?

(nach Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Ganze Zahlen

Weitere Hürden und Herausforderungen

- »negativ« als Wort mit mehreren verschiedenen Bedeutungen (*homonym*)

  negative Stimmung   negativer Corona-Test   negative Zahl

Bedeutungen thematisieren

- Generalisierung der Vorstellung »Hinzufügen vermehrt immer«
  - Übertragung von Vorstellung bei Addition als Hinzufügen
  - wird teils auch sprachlich gestützt

beim Vorstellungsaufbau beachten

- komplexer Wortschatzaufbau, abhängig vom Kontext

  »Obergeschoss« »Erdgeschoss« »Untergeschoss«

  »Meeresspiegel« »Normal-Null« »Tauchtiefe«

  »Plusgrade« »Gefrierpunkt« »Minusgrade« »Frost«

(wenige) Kontext(e) für Einführung auswählen

- Vermischung der Rechenregeln

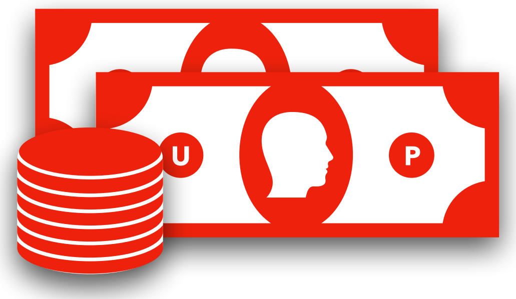
verständnisfördernder Aufbau; keine Merksätze

- **Welche** typischen **individuellen Voraussetzungen** (Vorstellungen, Kenntnisse, Kompetenzen, …) sind zu erwarten und **wie passen** diese zum **angestrebten Verständnis** (Ressourcen vs. Hindernisse)?
- **Woher** kommen typische **Hindernisse** oder **unerwünschte Vorstellungen**?
- Wie können typische **Vorkenntnisse und Vorstellungen** als **fruchtbare Anknüpfungspunkte** dienen?
- Welche **Schlüsselstellen** (Hindernisse, Wendepunkte, …) gibt es **im Lernweg** der Schüler/-innen?
- Wie kann der angestrebte **Lernpfad** bezüglich der Anknüpfungspunkte und Schlüsselstellen **neu angeordnet** werden?

(nach Hußmann & Prediger, 2016)

Beispiel: Ganze Zahlen

Vorschlag eines Lernpfades



Erfahrungen zum Umgang mit Guthaben/Schulden → Negative Zahlen als Beschreibungsinstrument für Schulden → Negative Zahlen als neue Zahlen → Repräsentation über Zahlengerade

Zustände und Zustandsänderungen

Gegensätze

relative Zahlen bezüglich einer fest gewählten Vergleichsmarke

Negative Zahlen als neuer Zahlenbereich

Richtungen

Ordnen und Vergleichen → Addieren/Subtrahieren (horizontal und vertikal) → Multiplizieren (horizontal und vertikal) → Dividieren durch Regelübertragung

Wie kann man rechnen, wenn man mehr wegnimmt, als man hat?

Wie kann man mit negativen Zahlen wiederholt dasselbe rechnen?

Literatur

Hußmann, S., & Prediger, S. (2016). Specifying and Structuring Mathematical Topics: A Four-Level Approach for Combining Formal, Semantic, Concrete, and Empirical Levels Exemplified for Exponential Growth. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *37*(S1), 33–67. https://doi.org/10.1007/s13138-016-0102-8

Lambert, A. (2012). *Gedanken zum aktuellen Kompetenzbegriff für den (Mathematik-)unterricht* [Vortrag]. Eingangsstatement zur Podiumsdiskussion im Rahmen des 3. Fachdidaktischen Kolloquiums an der Universität des Saarlandes, Saarbrücken. https://www.uni-saarland.de/fileadmin/upload/einrichtung/zfl/PDF_Fachdidaktik/PDF_Kolloquium_FD/Kompetenzbegriff_für_den_Mathematikunterricht_Statement_mit_Folien.pdf

Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Cornelsen. https://home.ph-freiburg.de/leudersfr/preprint/2009_leuders_intelligent_ueben_mathemagische_momente.pdf

Leuders, T., Prediger, S., Barzel, B., & Hußmann, S. (Hrsg.). (2015). *Mathewerkstatt. 7, Schulbuch* (Mittlerer Schulabschluss, allgemeine Ausg., 1. Aufl.). Cornelsen.

vom Hofe, R., & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren*, 2–7.

von der Bank, M.-C. (2013). Fundamentale Ideen, insbesondere Optimierung. In A. Filler & M. Ludwig (Hrsg.), *Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht. Ziele und Visionen 2020. Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken* (S. 83–124). Franzbecker. https://www.math.uni-sb.de/service/lehramt/AKGeometrie/AKGeometrie2012.pdf

Wikipedia. (2021). *Peano-Axiome – Wikipedia, die freie Enzyklopädie*. https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Peano-Axiome&oldid=216675163