

Stoffdidaktik Mathematik

Aufgabengestaltung

- Sie kennen Möglichkeiten, Aufgaben je nach ihrer Funktion und den auszubildenden Fähigkeitsaspekten auszuwählen bzw. zu erstellen.
- Sie können Aufgaben aus Schulbüchern für entsprechende Funktionen und Fähigkeitsaspekte anpassen.
- Sie kennen Differenzierungsmöglichkeiten mithilfe von Aufgaben, insbesondere durch geeignete Hilfestellungen.

Aufgaben sind Aufforderungen zum Ausführen von Lernhandlungen

Operatoren

Operator	Erläuterung
angeben, nennen	Für die Angabe bzw. Nennung ist keine Begründung notwendig.
entscheiden	Für die Entscheidung ist keine Begründung notwendig.
beurteilen	Das zu fällende Urteil ist zu begründen.
beschreiben	Bei einer Beschreibung kommt einer sprachlich angemessenen Formulierung und ggf. einer korrekten Verwendung der Fachsprache besondere Bedeutung zu. Eine Begründung für die Beschreibung ist nicht notwendig.
erläutern	Die Erläuterung liefert Informationen, mithilfe derer sich z. B. das Zustandekommen einer grafischen Darstellung oder ein mathematisches Vorgehen nachvollziehen lassen.
deuten, interpretieren	Die Deutung bzw. Interpretation stellt einen Zusammenhang her z. B. zwischen einer grafischen Darstellung, einem Term oder dem Ergebnis einer Rechnung und einem vorgegebenen Sachzusammenhang.
begründen, nachweisen, zeigen	Aussagen oder Sachverhalte sind durch logisches Schließen zu bestätigen. Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
berechnen	Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.
bestimmen, ermitteln	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
untersuchen	Die Art des Vorgehens kann – sofern nicht durch einen Zusatz anders angegeben – frei gewählt werden (z. B. Anwenden rechnerischer oder grafischer Verfahren). Das Vorgehen ist darzustellen.
grafisch darstellen, zeichnen	Die grafische Darstellung bzw. Zeichnung ist möglichst genau anzufertigen.
skizzieren	Die Skizze ist so anzufertigen, dass sie das im betrachteten Zusammenhang Wesentliche grafisch beschreibt.

IQB, 2019

Elementare Aneignungshandlungen

- Identifizieren
- Realisieren

Grundhandlungen

- Erkennen
- Beschreiben
- Verknüpfen
- Anwenden
- Begründen

Komplexe Handlungen

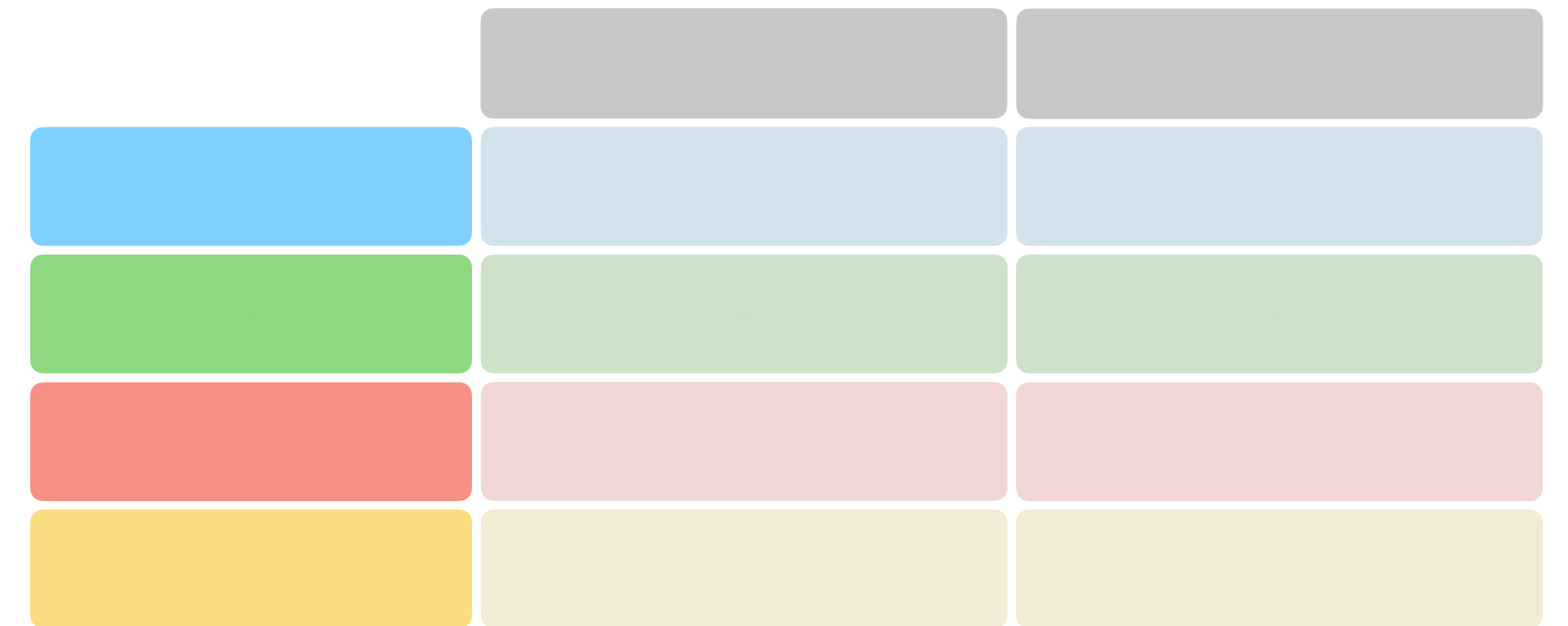
- Suchen
- Planen
- Ausführen
- Kontrollieren

Funktionen von Aufgaben

- Erkunden, Entdecken, Erfinden
- Sammeln, Sichern, Systematisieren
- Üben, Festigen, Wiederholen
- Vertiefen, Strukturieren, Vernetzen
- Differenzieren
- Selbsteinschätzung, Diagnose, Leistungsmessung

Leuders, 2015, S. 439; SINUS Bayern, o. J.

Grundlagen bei Entwicklung v. Aufgaben zu Lerngegenstand:



Fachlich Relevantes

Fundamentale Ideen & Grundvorstellungen

Kernideen/Kernfragen & Kontexte

Funktionen von Aufgaben

- Erkunden, Entdecken, Erfinden
- Sammeln, Sichern, Systematisieren

2 Prozente runterrechnen

Pia hat beim Einkaufsbummel in einem Geschäft ein verlockendes Angebot für den nächsten Tag gesehen. Nun überlegt sie, um wie viel Uhr sie morgen einkaufen soll.

Entscheiden Sie sich sofort!
Unser Jubiläumsgeschenk für Sie.
Rabatte für drei Artikel!

Für die ersten 3 Kunden ab 9⁰⁰: 100 % Rabatt
Für die nächsten 10 Kunden ab 9⁰⁰: 60 % Rabatt
Für die ersten 10 Kunden ab 10⁰⁰: 55 % Rabatt
Für die ersten 10 Kunden ab 11⁰⁰: 50 % Rabatt
...
Für die ersten 10 Kunden ab 19⁰⁰: 10 % Rabatt

a) Was meinst du zu der Rabattaktion? Beantworte dazu die folgenden Fragen:

- Du bist um 9.00 Uhr der erste Kunde. Was bezahlst du dann für eine Hose?
- Was bezahlst du, wenn du später am Tag kommst?
- Welche unterschiedlichen Preise werden an diesem Tag für eine Hose bezahlt? Wann kostet eine Hose 36 €?

b) Welchen Anteil vom ursprünglichen Preis bezahlt man bei 100 %, 60 %, 55 % Rabatt? Zeichne zu mindestens drei Rabatten einen Prozentstreifen zum Verdeutlichen.

Barzel et al., 2015, S. 223

2 Umrechnungstabelle für wichtige Werte beim Rechnen mit Prozenten erstellen

a) Damit man Prozente schnell einschätzen kann, ist es gut, wenn man weiß, was die wichtigsten Prozente, Brüche und Dezimalzahlen bedeuten. Übertrage die Tabelle ins Heft und fülle sie aus.

b) Beim Ausfüllen der Tabelle hilft die Darstellung am Bruchstreifen oder am Prozentstreifen. Welcher Streifen hilft bei welcher Zeile? Zeichne beide Streifen ins Heft und trage alle Werte in einen der beiden Streifen ein.

Prozent	Dezimalzahl	Bruch
1 %		
	0,05	
		$\frac{1}{10}$
	0,2	
25 %		
	0,5	
		$\frac{3}{4}$
		$\frac{1}{1}$
	1,5	
200 %		

100 %

100 %

Barzel et al., 2015, S. 2236

Funktionen von Aufgaben

- Üben, Festigen, Wiederholen

- Vertiefen, Strukturieren, Vernetzen

1 Prozente verschieden darstellen

- a) Stelle die Prozente in einem Streifen dar. Schreibe sie auch als Dezimalzahl und als Bruch.

(1) 25 %	(2) 75 %	(3) 15 %	⋮	(1) 4 %	(2) 16 %	(3) 24 %
(4) 30 %	(5) 90 %	(6) 80 %	⋮	(4) 96 %	(5) 72 %	(6) 83 %
(7) 55 %	(8) 40 %		⋮	(7) 33 %	(8) 66,7 %	

- b) Welche Prozente lassen sich besonders einfach darstellen?
Welche Prozente lassen sich nur schwierig darstellen? Begründe.

- c) Finde zu drei der Prozente Beispiele aus dem Alltag.

2 Prozente mit Papier falten

- a) Durch Papierfalten kannst du ein quadratisches Blatt Papier in gleich große Teile teilen.
Stelle auf diese Weise mindestens drei verschiedene Prozente dar.

- b) Stelle durch Falten die folgenden Prozente dar:
- | | | |
|-------------------------------|---|-----------------------------|
| 25 %, 12,5 %, 6,25 %, 18,75 % | ⋮ | 33,3 %, 16,7 %, 50 %, 8,3 % |
|-------------------------------|---|-----------------------------|

- c) Erkläre, warum es bei manchen Werten besonders schwierig ist.

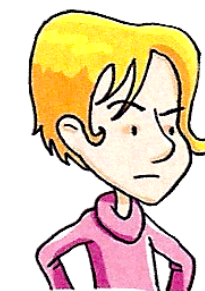
Barzel et al., 2015, S. 232

Training

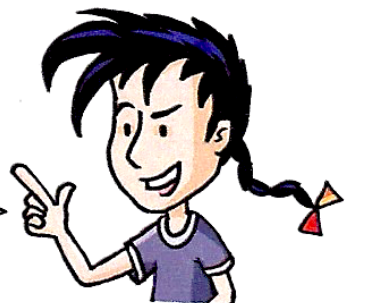
28 Prozentsätze über 100 % deuten

- a) Pia und Merve überlegen, was die Zeitungsüberschrift bedeutet.

„Ölpreis bei 150 % gegenüber Vorjahr.“



Ich denke, das bedeutet,
dass es $\frac{150}{100}$ sind.



Ich glaube, das heißt
50 Prozent mehr als vorher.

Nutze Pias Idee und Merves Idee, um den neuen Preis für einen Liter Öl zu berechnen, wenn der Preis vorher 70 Cent betragen hat.

- b) Zeichne einen Prozentstreifen, um zu verstehen, was Merve und Pia gerechnet haben.
Trage am Prozentstreifen Folgendes ein: 100 %, 50 %, 150 %, 70 ct, 105 ct.

- c) Trage am Prozentstreifen die folgenden Zahlen ein:

(1) $\frac{50}{100}$	(2) $\frac{100}{100}$	(3) $\frac{150}{100}$	(4) 0,5	(5) 1,5	(6) $\frac{5}{10}$
----------------------	-----------------------	-----------------------	---------	---------	--------------------

Barzel et al., 2015, S. 241

Funktionen von Aufgaben

- Selbsteinschätzung, Diagnose, Leistungsmessung

Ich kann Prozentaufgaben berechnen, indem ich Prozentstreifen, Minitabelle oder eine Rechnung verwende.

Berechne die Aufgaben auf verschiedenen Wegen:

- Wie viel Euro sind 24 % von 165 €?
- Wie viel Prozent sind 12,5 m von 138 m?
- Wie hoch stand das Wasser vorher, wenn es um 18 cm und damit um 20 % gestiegen ist?

Barzel et al., 2015, S. 244

Aufgaben sind Aufforderungen zum Ausführen von **Lernhandlungen**

Umgang mit Aufgaben

- **Konfrontation mit Aufgabe**
- **Bilden einer **internen** Lernaufgabe**
- **Bilden einer Orientierungsgrundlage**
Einflussfaktoren: Motivation, Aufmerksamkeit, emotionale Situation, Vorerfahrungen als bewährte Handlungsmuster, Kenntnissqualitäten im Gegenstandsbereich (Verfügbarkeit, Exaktheit, Allgemeinheitsgrad, ...)
- **Lösen der Aufgabe**
ggf. Unterstützung durch gestufte Hilfen
- **Handlungskontrolle**
 - Prüfen der Handlungsergebnisse (d. h. der Lösungen)
 - Reflexion des Handlungsvollzugs (d. h. der Lösungswege)

Allgemeiner Lernprozess

- **Anforderungssituation**
in der Zone der nächsten Entwicklung
 - **Herausarbeiten von Lernzielen**
 - **Bilden einer Orientierungsgrundlage**
 - Probierorientierung
 - Musterorientierung
 - Feldorientierung
 - **Ausführen und Verinnerlichen von Lernhandlungen**
 - materielle/materialisierte Handlung
 - sprachliche Handlung
 - geistige Handlung
 - **Handlungskontrolle**
- Orientierungsteil der Lernhandlung
- Ausführungsteil der Lernhandlung

Aufgaben sind Aufforderungen zum Ausführen von **Lernhandlungen**

Umgang mit Aufgaben

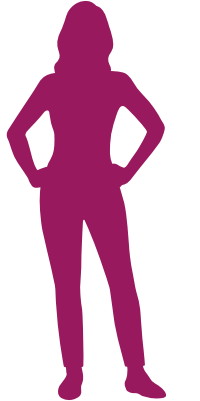


- **Konfrontation mit Aufgabe**
- **Bilden einer internen Lernaufgabe**
- **Bilden einer Orientierungsgrundlage**
Einflussfaktoren: Motivation, Aufmerksamkeit, emotionale Situation, Vorerfahrungen als bewährte Handlungsmuster, Kenntnissqualitäten im Gegenstandsbereich (Verfügbarkeit, Exaktheit, Allgemeinheitsgrad, ...)
- **Lösen der Aufgabe**
ggf. Unterstützung durch gestufte Hilfen
- **Handlungskontrolle**
 - Prüfen der Handlungsergebnisse (d. h. der Lösungen)
 - Reflexion des Handlungsvollzugs (d. h. der Lösungswege)

Orientierungsteil
der Lernhandlung

Ausführungsteil der
Lernhandlung

Arbeiten mit Aufgaben



- Aufgaben auswählen, entwickeln und variieren
- Art des Stellen von Aufgaben
- Beurteilen des Lernpotenzials
- Arrangieren von Aufgaben innerhalb der Unterrichtsstunde, Bereitstellen von Musterlösungen
- Entwickeln von Bewertungsmaßstäben für Aufgabenlösungen
- Art der Begleitung des Aufgabenbearbeitungsprozesses
- Herausarbeiten des fachlichen und lernmethodischen Erkenntniszuwachses
- Wahl der Organisationsform für das Auswerten und Vergleichen von Schülerlösungen

Bruder, 2012, S. 21

Aufgaben variieren

Wie?

Aufgabentypen nach Offenheit

x = gegeben/bekannt, o = nicht gegeben/nicht bekannt

Aufgaben/ Problemtypen	Start	Weg	Ziel	Beispiele
(geschlossene) Aufgabe, <i>task</i> , <i>routine exercise</i>	x	x	o	Aufgabenpensen (Lenné 1969)
Problem	x	o	x/o	Aufgaben mit multiplen Lösungswegen (Guberman und Leikin 2013), Strategievergleiche (Rittle-Johnson und Star 2007)
Umkehrproblem	x/o	o	x	Operatives Üben (Aebli 1985; Winter 1984)
Offene Situation <i>open ended problem</i>	x/o	o	o	Explorationen (z.B. Mason et al.1991; Lengnink und Leuders 2008), Open-ended-problems (Becker und Shimada 1997), Problem posing (Brown und Walter 1990)
Gelöste Aufgabe <i>worked problem</i>	x	x	x	Lernen aus Lösungsbeispielen (Sweller und Cooper 1985)

Leuders, 2015, S. 441

Warum?

Vielfältige Fähigkeitsaspekte

- Kenntnisse
- Fertigkeiten
- Verstehen/Vorstellungen
- Anwendungsfähigkeit
- (übergreifende) Strategien
- Reflexionsfähigkeit
- Einstellungen

Leuders, 2009, S. 137 ff.

Aufgaben variieren

Warum?

Vielfältige Fähigkeitsaspekte

- Kenntnisse
- Fertigkeiten
- Verstehen/Vorstellungen
- Anwendungsfähigkeit
- (übergreifende) Strategien
- Reflexionsfähigkeit
- Einstellungen

Leuders, 2009, S. 137 ff.

Prüffragen nachher: Regt die Aufgaben
• möglichst oft auszuführen? (Effektivität)
• auf verschiedenen Niveaus auszuführen?
• operativ durchzuführen? (Flexibilität)
• beim Ausführen zu reflektieren? (Variation)

Natürlich muss nicht jede Aufgabe
der entstanden Aufgaben haben, da
„Nachbesserungen“:

Aufgaben optimieren ...	
Effektivität optimieren	Verändern Sie die Aufgaben, z. B. durch ...
Differenzierung optimieren	Stellen Sie sicher, dass ...
Flexibilität optimieren	Formulieren Sie die Aufgaben ...
Reflexivität optimieren	Öffnen Sie die Aufgaben ...

Tabelle: Techniken für das Erzeugen

Aufgabentyp:	Frage
Probleme lösen	Umkehrfrage
	Optimierung
Operatives Durcharbeiten von Umkehraufgaben/Aufgaben mit Parametern	Funktionale Abhängigkeit
	Kombinatorische Ausschöpfung
Spielesches Auseinandersetzen mit Spielsituationen	Übungsspiel
	Spielanalyse
Eigene Aufgaben erarbeiten mit Musteraufgaben	Variieren

138

Aufgabentyp:	Frage
Strukturen reflektieren	Muster
	Muster fortsetzen
Muster erkennen und erzeugen in strukturierten Aufgabenserien	Analogie
	Sortieren
Strukturieren von unstrukturierten Aufgaben	Passung
	Bewerten
Argumentieren an gestellten/gelösten Aufgaben	Muster begründen
	Darstellen
	Richtigkeitsgültigkeit
	Fehler

Aufgabentyp:	Frage	Aufgabenbeispiele
Anwendungen erkunden	an Beispielen anwenden	Wende ... bei der Bearbeitung folgen der Situationen an.
Anwenden auf Beispielsituationen/Sachsituationen	Anwendbarkeit reflektieren	Kann man ... hier anwenden. Warum (nicht)?
	Anwendungen erfinden	Erfinde weitere Situationen, in denen du ... anwenden kannst.
Vernetzen mit verwandten Begriffen/Situationen	Verbindungen erfassen	Wie passt das zu ...?
	Verbindungen suchen	Wo hast du ... schon einmal gesehen/gemacht?
	Übertragen	Wie lässt sich ... auf ... übertragen.

Eine didaktisch und mathematisch dankbare Tätigkeit

Intelligentes Üben hat nach den vorangegangenen Ausführungen einen echten Mehrwert für die Lernenden – und ganz nebenbei für die Lehrenden. Denn Aufgabenkonstruktion ist mehr als langweiliges Alltagsgeschäft. Wenn Sie sich erst einmal darauf eingelassen haben, werden Sie feststellen, dass Sie im doppelten Sinne wieder zum Forscher werden:

- zum pädagogischen Forscher, denn Sie erkunden den didaktischen Gehalt ihrer Übungsaufgaben
- zum mathematischen Forscher, denn oft geht das Konstruieren von Aufgaben einher mit mathematischen (Wieder)entdeckungen.

Hier nur zwei Beispiele:

Beispiel 1: Sie möchten, dass Schülerinnen und Schüler die Quadratzahlen und Primzahlen memorieren. Dazu überlegen Sie sich, dass die Schüler möglichst oft mit Quadratzahlen und Primzahlen operieren. Sie nutzen die Technik „Erfinde Aufgaben ... mit den Lösungen ...“, die Ihnen problemorientierte Übungsaufgaben erzeugt. Zum Beispiel:

Suche möglichst viele Lösungen zu der Aufgabe:

+ =

Dabei sollen in den Kästen nur Primzahlen oder Quadratzahlen stehen.

139

Gestufte Hilfen

so wenig wie möglich – so viel wie nötig

- **Inhaltsorientierte strategische Hilfen**

Veranschauliche dir die Situation mit einer Skizze.

Stelle eine Gleichung auf.

Orientiere dich beim Vorgehen an dem Beispiel, das du bereits gerechnet hast.

- **Inhaltliche Hilfen**

Überlege, was mit dem Flächeninhalt passiert, wenn du die Seitenlängen verdoppelst.

Du kannst hier das Kommutativgesetz anwenden.

Zech, 1998, S. 315 ff.

Gestufte Hilfen *so wenig wie möglich – so viel wie nötig*

Inhaltsorientierte strategische Hilfen

Veranschauliche dir die Situation mit einer Skizze.

Stelle eine Gleichung auf.

Orientiere dich beim Vorgehen an dem Beispiel, das du bereits gerechnet hast.

Inhaltliche Hilfen

Überlege, was mit dem Flächeninhalt passiert, wenn du die Seitenlängen verdoppelst.

Du kannst hier das Kommutativgesetz anwenden.

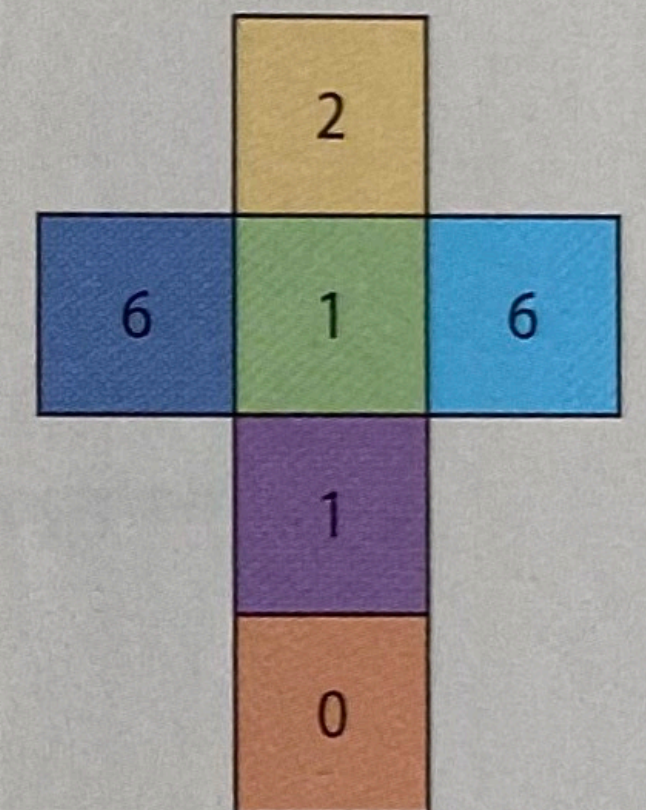
Zech, 1998, S. 315 ff.

6 Korbinian würfelt zweimal mit dem abgebildeten Würfel und multipliziert die Augenzahlen.

- a) Gib ein unmögliches Ereignis dieses Zufallsexperiments an.
- b) Bestimme die Ergebnismenge.
- c) Handelt es sich um ein Laplace-Experiment? Begründe.
- d) Verändere das Würfelnetz so, dass es noch wahrscheinlicher ist, null zu würfeln. Die Ergebnismenge soll gleich bleiben.

- a) Bestimme die Ergebnismenge.
- b) Isabel macht das Zufallsexperiment mit einem anderen Würfel. Ihre Ergebnismenge lautet $\{0; 1; 3; 4; 9; 12; 16\}$. Zeichne ein mögliches Netz von Isabels Würfel.
- c) Wie muss das Netz in Aufgabe b) beschaffen sein, damit es möglichst wahrscheinlich ist, 16 zu erhalten?

Netz des Würfels:



Adam & Kleine, 2016, S. 32

Literatur

- Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 8, Berlin/Brandenburg*. C.C.Buchner.
- Barzel, B., Blattmann, A., Bullinger, R., Glade, M., & Greefrath, G. (2015). *Mathewerkstatt. 7, Schulbuch* (T. Leuders, S. Prediger, B. Barzel, & S. Hußmann, Hrsg.; 1. Auflage). Cornelsen.
- Bruder, R., & Komorek, E. (2007). Aufgaben für Hausaufgaben. Was ist eine gute Hausaufgabe? – Kommt drauf an *mathematik lehren*, 140, 11–16.
- Bruder, R. (2012). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In R. Bruder, T. Leuders, & A. Büchter (Hrsg.), *Mathematikunterricht entwickeln* (S. 18–52). Cornelsen Scriptor.
- Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (2019). *Gemeinsame Aufgabenpools der Länder. Aufgaben für das Fach Mathematik. Grundstock von Operatoren*. https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/abitur/dokumente/mathematik/M_Grundstock_von.pdf
- Leuders, T. (2009). Intelligent üben und Mathematik erleben. In T. Leuders, L. Hefendehl-Hebeker, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Mathemagische Momente* (S. 130–143). Cornelsen. https://home.ph-freiburg.de/leudersfr/preprint/2009_leuders_intelligent_ueben_mathemagische_momente.pdf
- Leuders, T. (2015). Aufgaben in Forschung und Praxis. In R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 435–460). Springer Berlin Heidelberg. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-35119-8>
- SINUS Bayern. (o. J.). *Aufgabenkultur*. Abgerufen 2. Januar 2022, von https://www.deltaplus.bayern.de/fileadmin/user_upload/DELTAplus/1_Aufgabenkultur/Aufgabenkultur.pdf
- Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik* (9. Aufl.). Beltz Verlag.