Stoffdidaktik Mathematik

Leitidee Daten und Zufall

Leitidee Daten und Zufall

Diese Leitidee umfasst zwei Säulen, die beschreibende Statistik und die Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Modellierung von zufallsabhängigen Vorgängen und Risiken. Wahrscheinlichkeiten können als Prognosen von relativen Häufigkeiten bei zufallsabhängigen Vorgängen gedeutet werden, wodurch die beiden Säulen verknüpft werden. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind die Stochastik und Funktionen. Es werden Begriffe und Methoden zur Erhebung, Aufbereitung und Interpretation von statistischen Daten vernetzt mit solchen zur Beschreibung und Modellierung zufallsabhängiger Situationen. Die stochastische Simulation spielt bei der Verknüpfung eine wichtige Rolle. Der Umgang mit Daten und Zufallserscheinungen im Alltag und Zufallsexperimenten geschieht auch unter Verwendung einschlägiger digitaler Mathematikwerkzeuge, hier vor allem Tabellenkalkulation und Stochastiktools.

(Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022, S. 21 ff.)

Die Schülerinnen und Schüler

- werten grafische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus, auch mit Hilfe von Tabellenkalkulation oder Stochastiktools,
- nutzen Simulationen, um stochastische Fragen zu entscheiden,
- planen statistische Erhebungen, auch unter den Aspekten Stichprobenauswahl und Erhebungsinstrument,
- sammeln systematisch Daten (z. B. Messwerte, Daten aus Befragungen oder Internet), organisieren sie in Tabellen und stellen sie grafisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel wie Tabellenkalkulation oder Stochastiktools,
- ermitteln und interpretieren Kenngrößen (z. B. Minimum, Maximum, arithmetisches Mittel, Median, Spannweite, Quartile),
- erstellen und interpretieren Diagramme (z. B. Säulen- oder Balkendiagramm, Histogramme, Kreisdiagramm, Liniendiagramm, Boxplot), auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge und begründen die gewählte Darstellungsform,
- reflektieren mit Hilfe der mathematischen Kenntnisse den Umgang mit und die Darstellung von Daten in Medien, etwa in Bezug auf die Absicht und mögliche Wirkungen der Darstellung,
- beschreiben Zufallserscheinungen und interpretieren Wahrscheinlichkeitsaussagen und ihre Darstellungen in Medien,
- Nutzen und deuten bei der Durchführung von Zufallsexperimenten die auftretenden relativen Häufigkeiten als Schätzwerte von Wahrscheinlichkeiten, die bei wachsendem Stichprobenumfang besser werden,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei ein- oder mehrstufigen Zufallsexperimenten, auch mit Hilfe entsprechender Visualisierungen (z. B. Baumdiagramm, Vierfeldertafel), ohne und mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- nutzen Visualisierungen, um bei einfachen, alltagsnahen Modellierungen bedingte Wahrscheinlichkeiten zu erkennen, ohne und mit Hilfe digitaler Medien.

Idee der Daten
als erfasste Informationen aus der Vergangenheit und Gegenwart

- Stellen von Fragen zu Merkmalen (Eigenschaften von Personen/ Objekten/Vorgängen etc.)
- Sammlung von Daten in Form von Merkmalsausprägungen
  - Planung und Anwendung verschiedener Methoden und Dokumentationsformen
  - Unterscheidung von qualitativen und quantitativen Merkmalen
- Darstellung von Daten in Tabellen, Ranglisten, Diagrammen
  - Darstellung der Häufigkeit als absolute/relative Häufigkeit
  - Darstellung mithilfe von Nominal-/Ordinal- oder Metrischen Skalen
- Auswertung von Datendarstellungen
  - Ablesen von Informationen
  - Ermitteln von Kennwerten
  - Formulieren, Interpretieren und Validieren von Aussagen, Kennwerten und Darstellungen

Idee der Wahrscheinlichkeit
als Maß für das Eintreten von Ergebnissen in der Zukunft

- Treffen von Aussagen zum Ausgang von Situationen
- Entwicklung von Modellvorstellungen auf der Grundlage von Zufallsexperimenten (einstufig/mehrstufig)

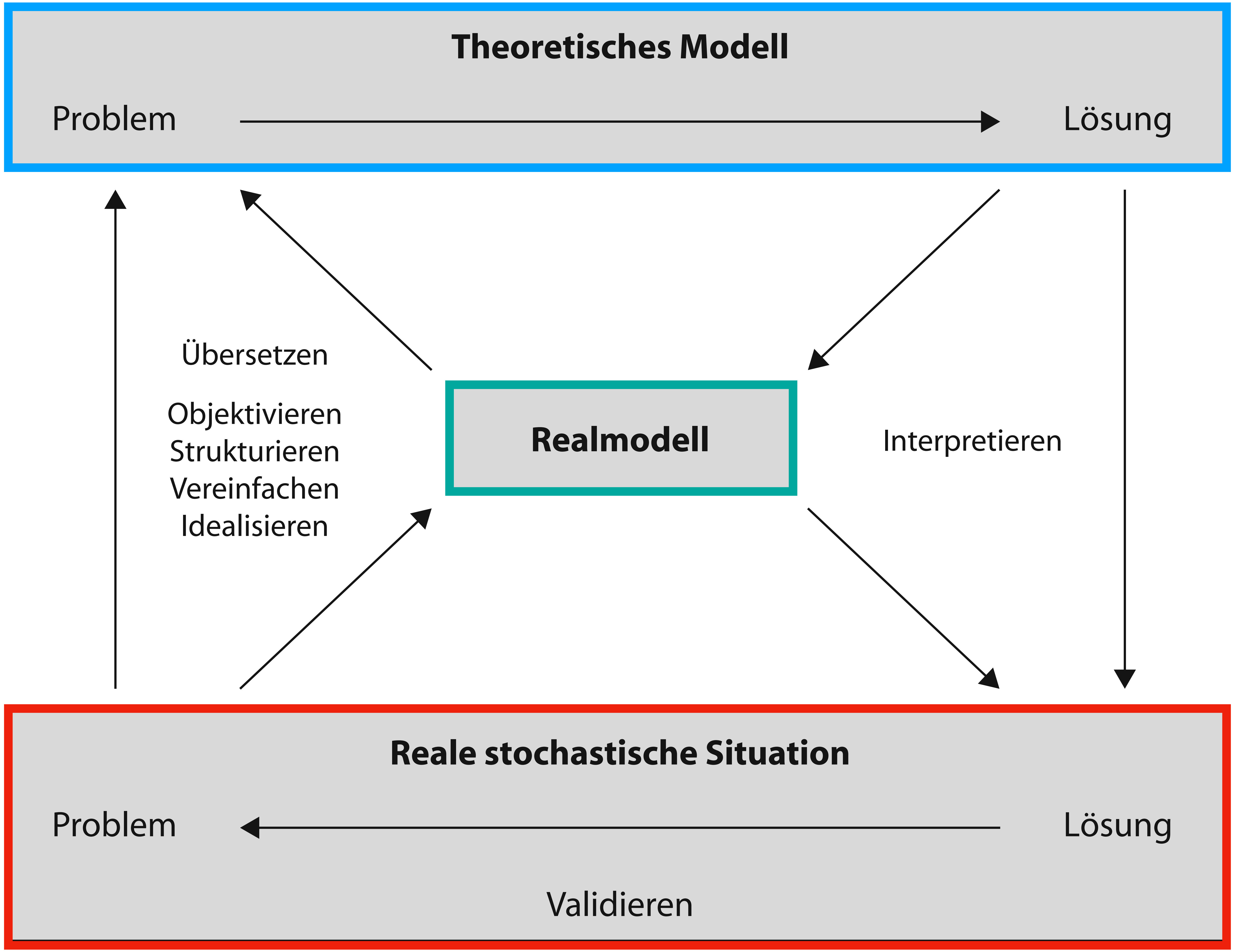
Statistische Wahrscheinlich-keit	Subjektive Wahrscheinlich-keit	Mathematische Wahrscheinlich-keit
Beurteilung zu erwartender Ergebnisse auf der Basis von Experimenten, Datenerhebungen und deren Auswertung	Einschätzen der Wahrscheinlich-keit auf der Grundlage von Erfahrungen, Kenntnissen und Bedingungen	Ermitteln und Berechnen der Wahrscheinlich-keit auf Grundlage von Modellvor-stellungen, Symmetrie und bekannter Wahrscheinlich-keiten

- Anwendung der Wahrscheinlichkeit in Realsituationen

Idee der Kombinatorik
als geschicktes Zählen der Anzahl von Möglichkeiten

- Unterscheiden von Situationen und Möglichkeiten
  - Auswahl aller/einiger Elemente
  - Anordnung mit Beachtung/ohne Beachtung der Reihenfolge
- Herstellen von Möglichkeiten
- Bestimmen der Anzahl von Möglichkeiten

LISUM, o. J.



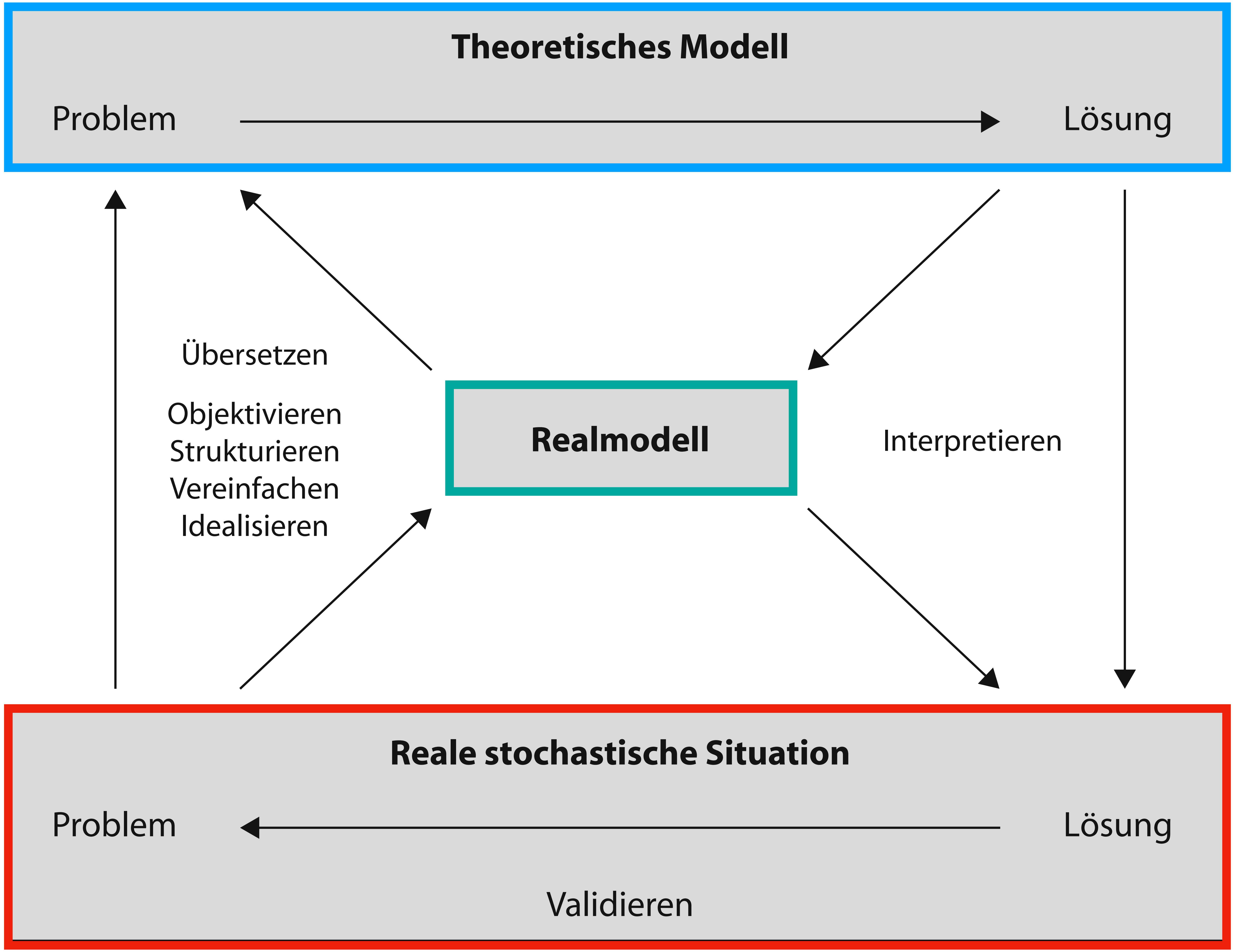
(Krüger et al., 2015, S. 13)

Laplace-Versuch, $p = \frac{1}{6}$

Welche Eigenschaften muss der Würfel haben, damit du so rechnen darfst?

sechs gleich große Seiten;
vollkommen symmetrisch;
Masse homogen verteilt

Welche Annahmen triffst du?



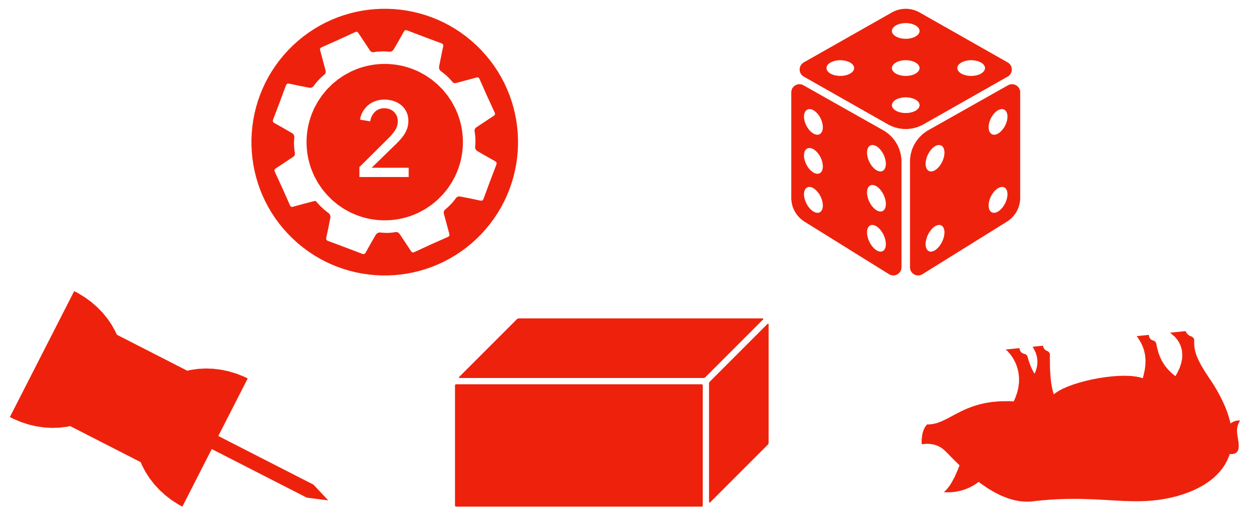
(Krüger et al., 2015, S. 13)

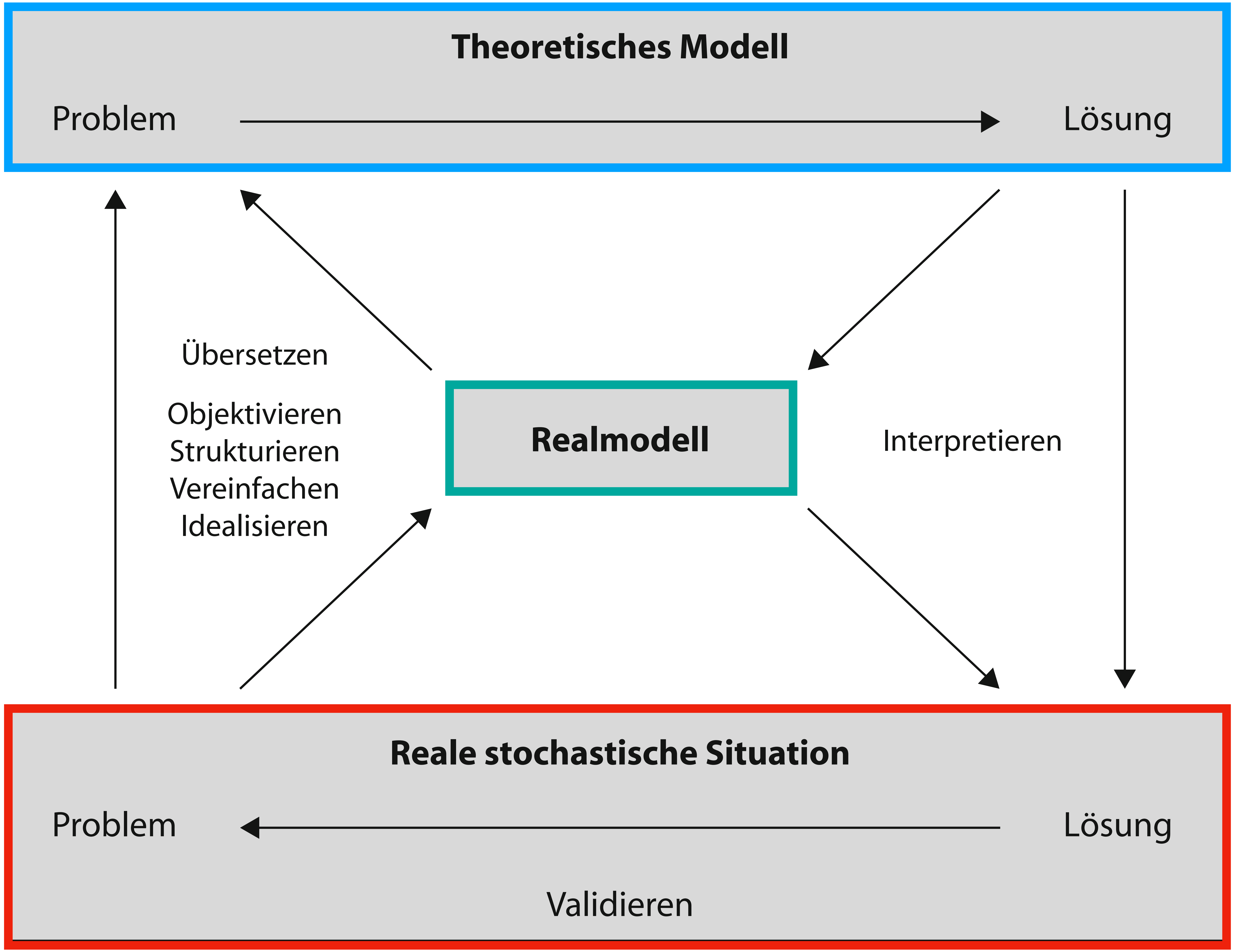
Zufallsgerät

Kann ein Zufallsgerät vom Tisch fallen?

idealer Würfel

Würfel



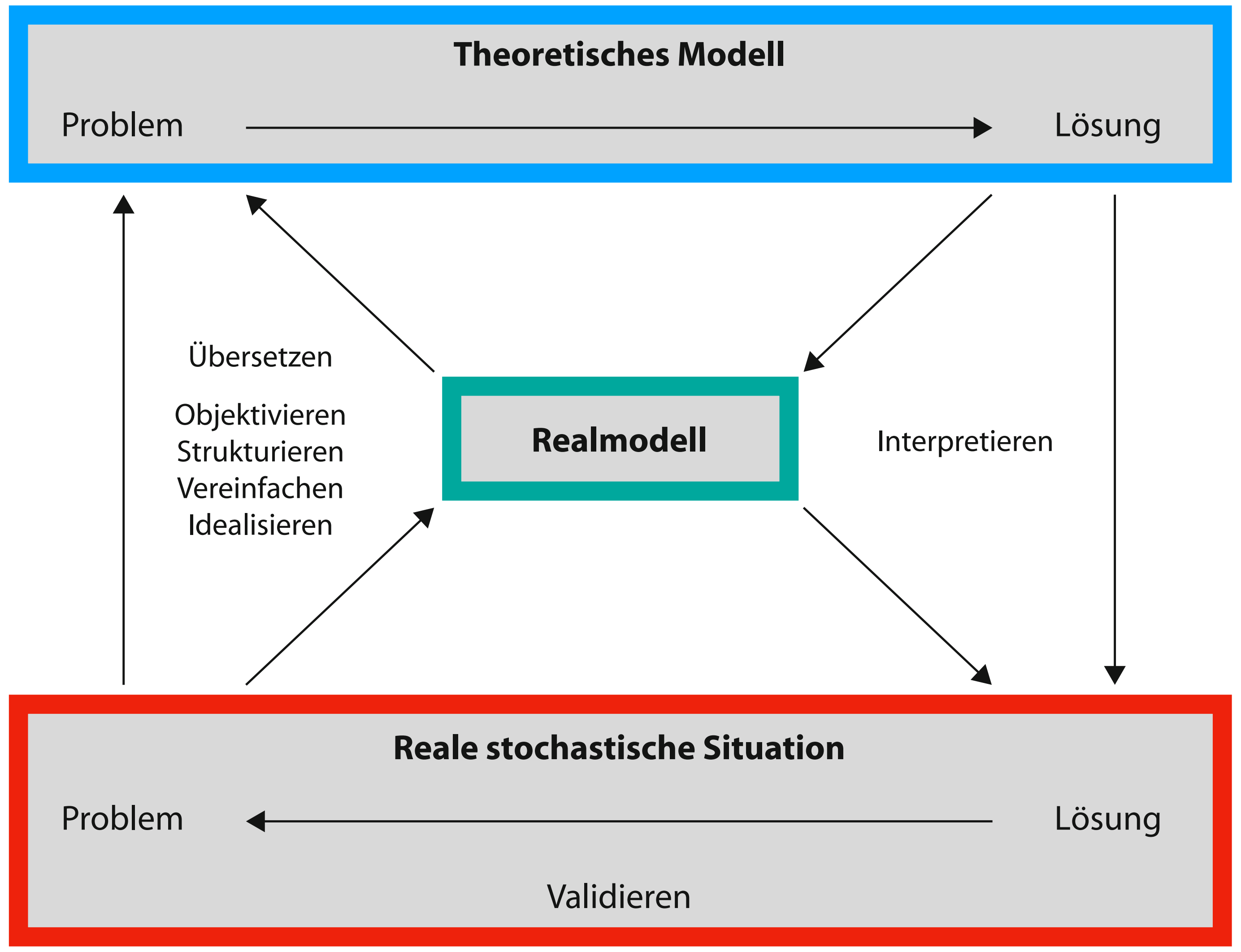


(Krüger et al., 2015, S. 13)

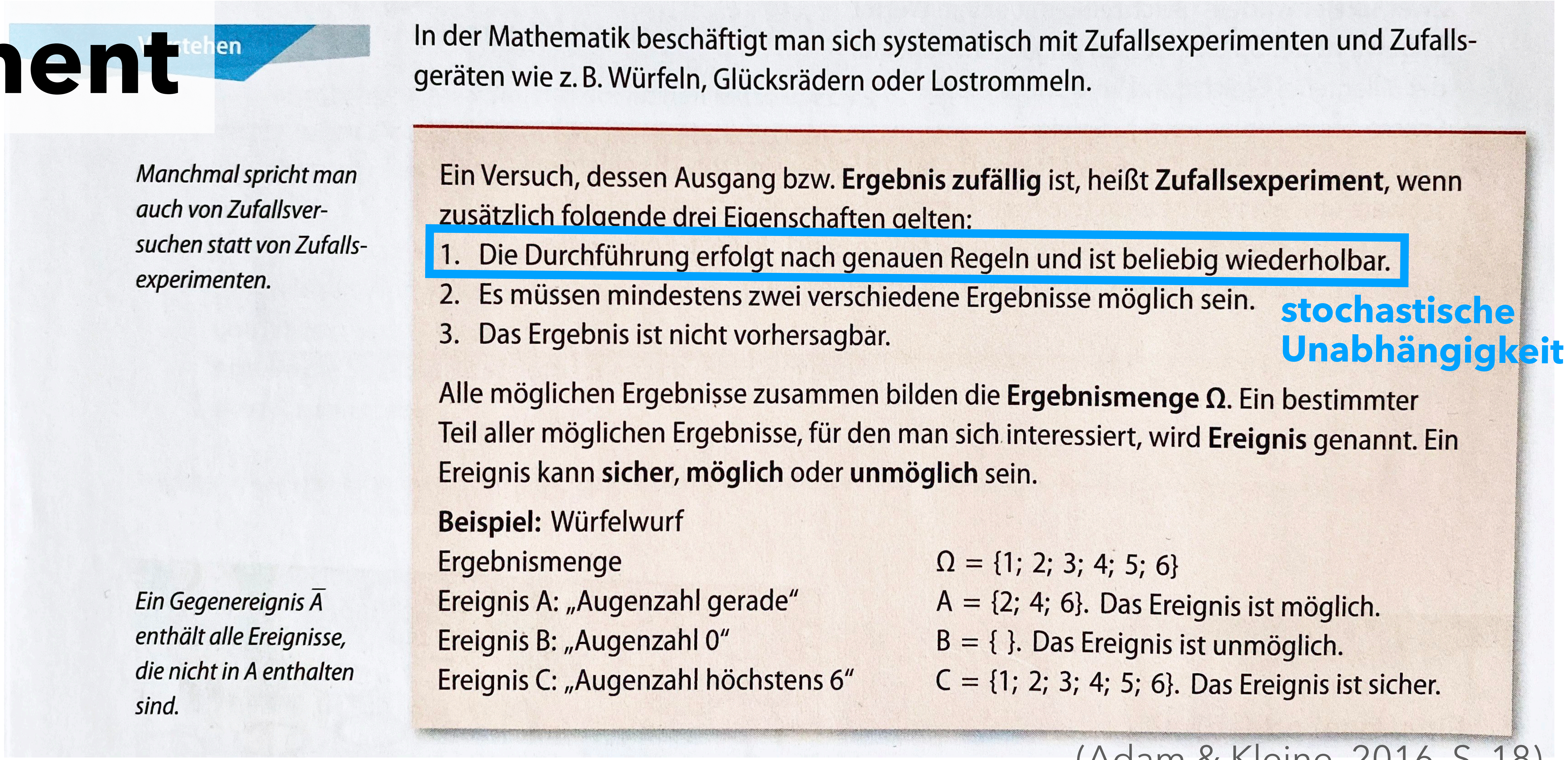
Bestimme die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatblatt eine Herz-Karte zu ziehen.

- Welche Schwierigkeiten könnten Schülerinnen und Schüler bei dieser Aufgabe haben?
- Auf welcher Modellstrukturebene liegen diese Schwierigkeiten jeweils?

Zufallsexperiment



(Krüger et al., 2015)



In der Mathematik beschäftigt man sich systematisch mit Zufallsexperimenten und Zufallsgeräten wie z. B. Würfeln, Glücksrädern oder Lostrommeln.

Manchmal spricht man auch von Zufallsversuchen statt von Zufallsexperimenten.

Ein Versuch, dessen Ausgang bzw. **Ergebnis zufällig** ist, heißt **Zufallsexperiment**, wenn zusätzlich folgende drei Eigenschaften gelten:

1. Die Durchführung erfolgt nach genauen Regeln und ist beliebig wiederholbar.
2. Es müssen mindestens zwei verschiedene Ergebnisse möglich sein.
3. Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar.

stochastische Unabhängigkeit

Alle möglichen Ergebnisse zusammen bilden die **Ergebnismenge Ω**. Ein bestimmter Teil aller möglichen Ergebnisse, für den man sich interessiert, wird **Ereignis** genannt. Ein Ereignis kann **sicher, möglich** oder **unmöglich** sein.

Beispiel: Würfelwurf

Ergebnismenge	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Ereignis A: „Augenzahl gerade"	$A = \{2; 4; 6\}$. Das Ereignis ist möglich.
Ereignis B: „Augenzahl 0"	$B = \{\ \}$. Das Ereignis ist unmöglich.
Ereignis C: „Augenzahl höchstens 6"	$C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Das Ereignis ist sicher.

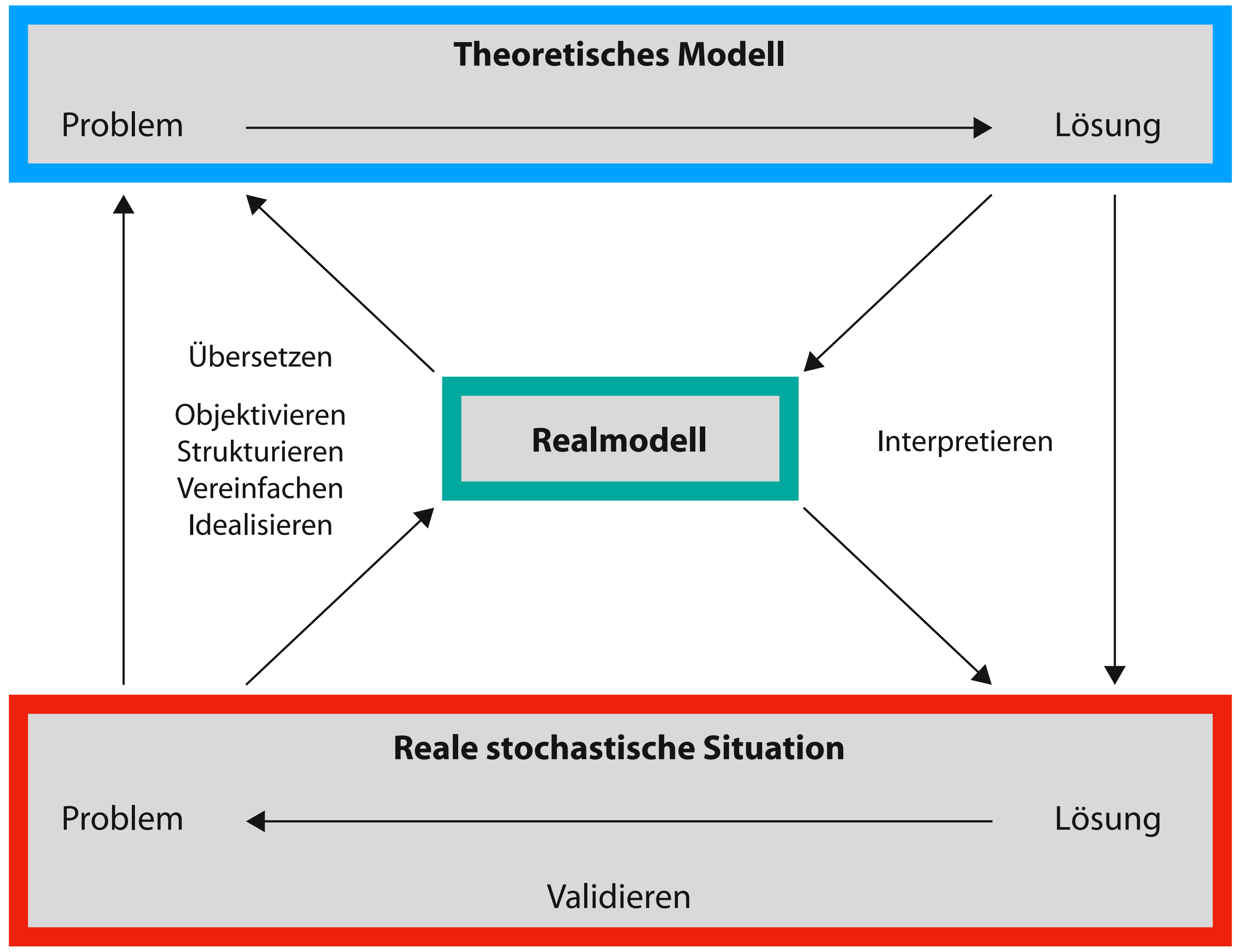
Ein Gegenereignis $\bar{A}$ enthält alle Ereignisse, die nicht in A enthalten sind.

(Adam & Kleine, 2016, S. 18)

- Definition des Begriffs »Zufallsexperiment« mathematisch nicht notwendig
- Verwischen der Grenze zwischen Realität und Modellebene
- saubere Definition (auf Modellebene) bedarf auch Definition von »Zufallsgerät«
- eingeschränkte Anwendungssichtweise; Dominanz von Glücksspielen

»Die Wiederholbarkeit eines Vorgangs unter gleichen Bedingungen ist also keine definierende Eigenschaft eines stochastischen Vorgangs.«

Zufallsexperiment



(Krüger et al., 2015)

In der Mathematik beschäftigt man sich systematisch mit Zufallsexperimenten und Zufallsgeräten wie z. B. Würfeln, Glücksrädern oder Lostrommeln.

Manchmal spricht man auch von Zufallsversuchen statt von Zufallsexperimenten.

Ein Versuch, dessen Ausgang bzw. **Ergebnis zufällig** ist, heißt **Zufallsexperiment**, wenn zusätzlich folgende drei Eigenschaften gelten:

1. Die Durchführung erfolgt nach genauen Regeln und ist beliebig wiederholbar.
2. Es müssen mindestens zwei verschiedene Ergebnisse möglich sein.
3. Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar.

Alle möglichen Ergebnisse zusammen bilden die **Ergebnismenge Ω**. Ein bestimmter Teil aller möglichen Ergebnisse, für den man sich interessiert, wird **Ereignis** genannt. Ein Ereignis kann **sicher, möglich** oder **unmöglich** sein.

Beispiel: Würfelwurf

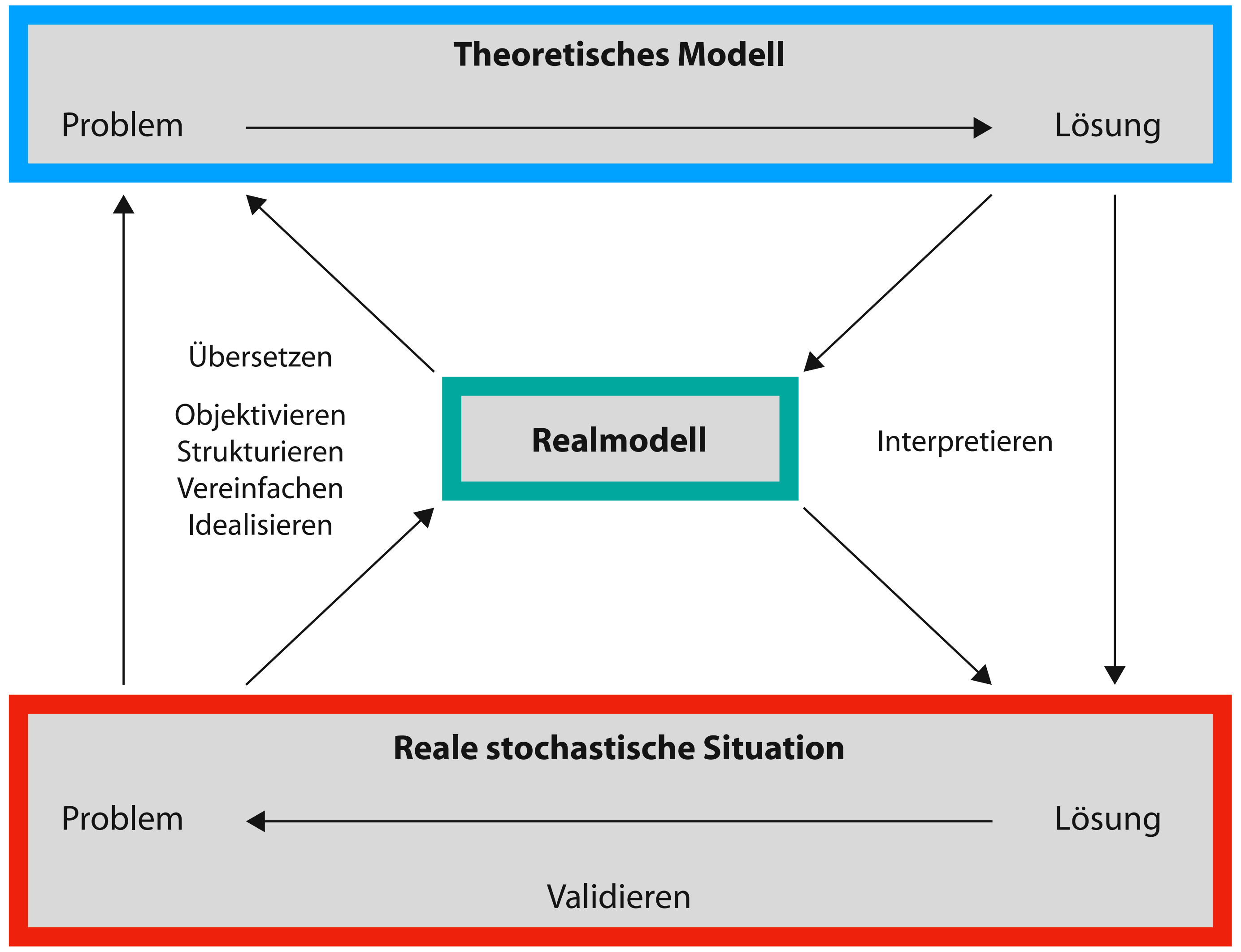
Ergebnismenge	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Ereignis A: „Augenzahl gerade“	$A = \{2; 4; 6\}$. Das Ereignis ist möglich.
Ereignis B: „Augenzahl 0“	$B = \{\ \}$. Das Ereignis ist unmöglich.
Ereignis C: „Augenzahl höchstens 6“	$C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Das Ereignis ist sicher.

Ein Gegenereignis $\overline{A}$ enthält alle Ereignisse, die nicht in A enthalten sind.

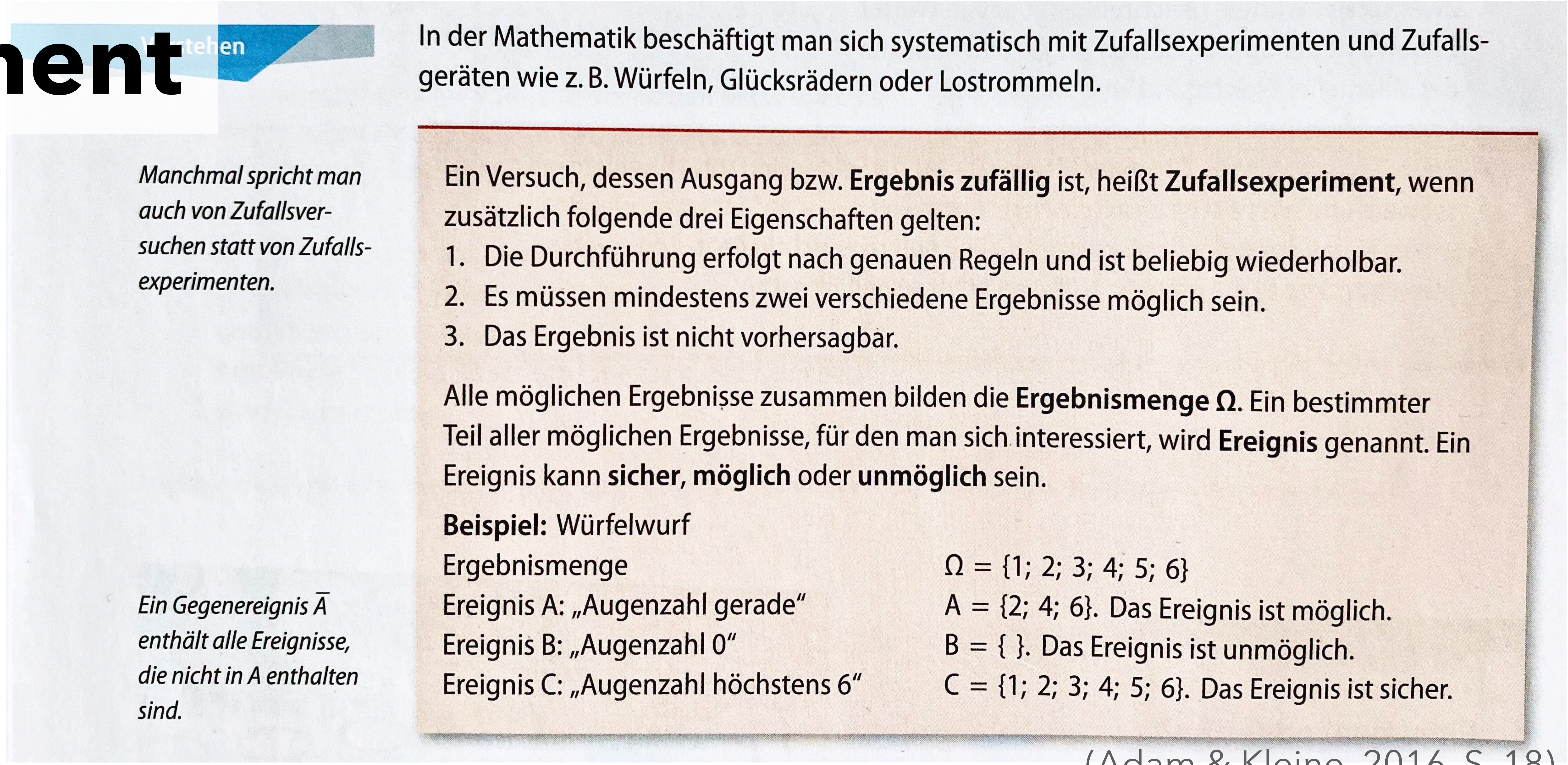
(Adam & Kleine, 2016, S. 18)

- Widerspruch zum Experiment-Begriff aus den Naturwissenschaften:
  - von Individuen geplant, durchgeführt und ausgewertet
  - dienen zur Überprüfung von wissenschaftlichen Hypothesen
- in Anwendungen oft Situationen, die offensichtlich keine Experimente sind (z. B. Schreiben einer Leistungskontrolle, Mensch-ärger-dich-nicht-Spiel)

Zufallsexperiment



(Krüger et al., 2015)



In der Mathematik beschäftigt man sich systematisch mit Zufallsexperimenten und Zufallsgeräten wie z. B. Würfeln, Glücksrädern oder Lostrommeln.

Manchmal spricht man auch von Zufallsversuchen statt von Zufallsexperimenten.

Ein Versuch, dessen Ausgang bzw. **Ergebnis zufällig** ist, heißt **Zufallsexperiment**, wenn zusätzlich folgende drei Eigenschaften gelten:

1. Die Durchführung erfolgt nach genauen Regeln und ist beliebig wiederholbar.
2. Es müssen mindestens zwei verschiedene Ergebnisse möglich sein.
3. Das Ergebnis ist nicht vorhersagbar.

Alle möglichen Ergebnisse zusammen bilden die **Ergebnismenge Ω**. Ein bestimmter Teil aller möglichen Ergebnisse, für den man sich interessiert, wird **Ereignis** genannt. Ein Ereignis kann **sicher, möglich** oder **unmöglich** sein.

Beispiel: Würfelwurf

Ergebnismenge	$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Ereignis A: „Augenzahl gerade"	$A = \{2; 4; 6\}$. Das Ereignis ist möglich.
Ereignis B: „Augenzahl 0"	$B = \{\ \}$. Das Ereignis ist unmöglich.
Ereignis C: „Augenzahl höchstens 6"	$C = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Das Ereignis ist sicher.

Ein Gegenereignis $\overline{A}$ enthält alle Ereignisse, die nicht in A enthalten sind.

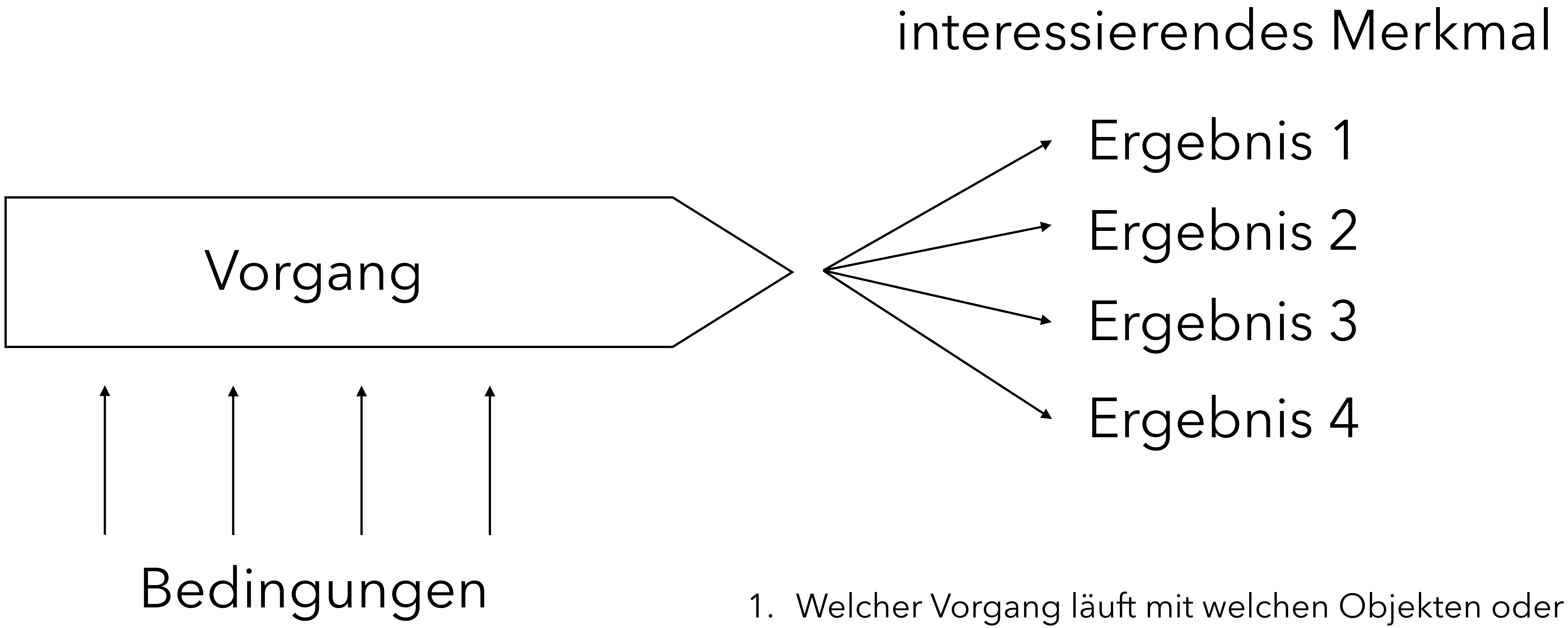
(Adam & Kleine, 2016, S. 18)

Vorschlag:

»Vorgang mit mehreren möglichen Ergebnissen« (Grundschule) oder

»stochastischer Vorgang« (Sekundarstufe)

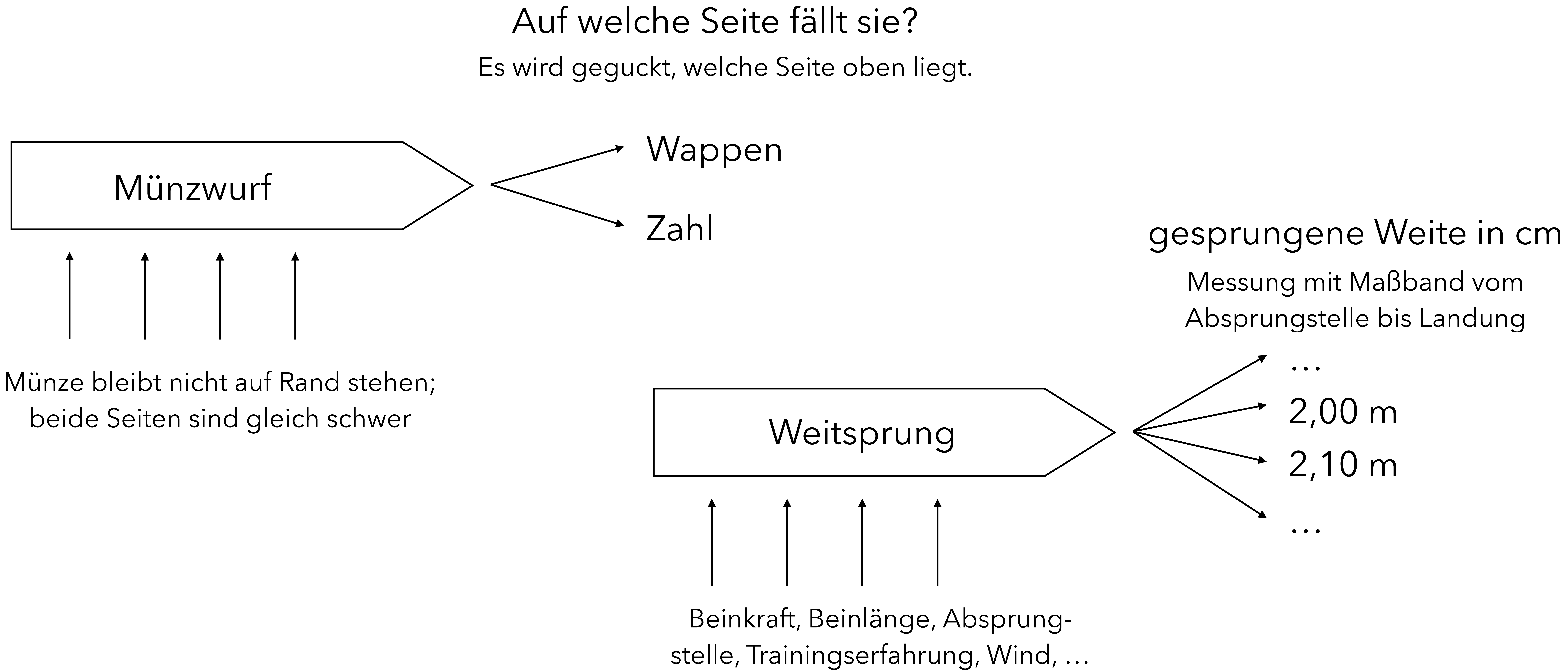
Prozessbetrachtung



1. Welcher Vorgang läuft mit welchen Objekten oder Personen ab?
2. Welches Merkmal interessiert mich? Wie kann ich das Merkmal erfassen?
3. Welche Ergebnisse sind möglich?
4. Welche Bedingungen beeinflussen den Vorgang?

(Krüger et al., 2015, S. 11 ff.)

Prozessbetrachtung



Bedingte Wahrscheinlichkeiten

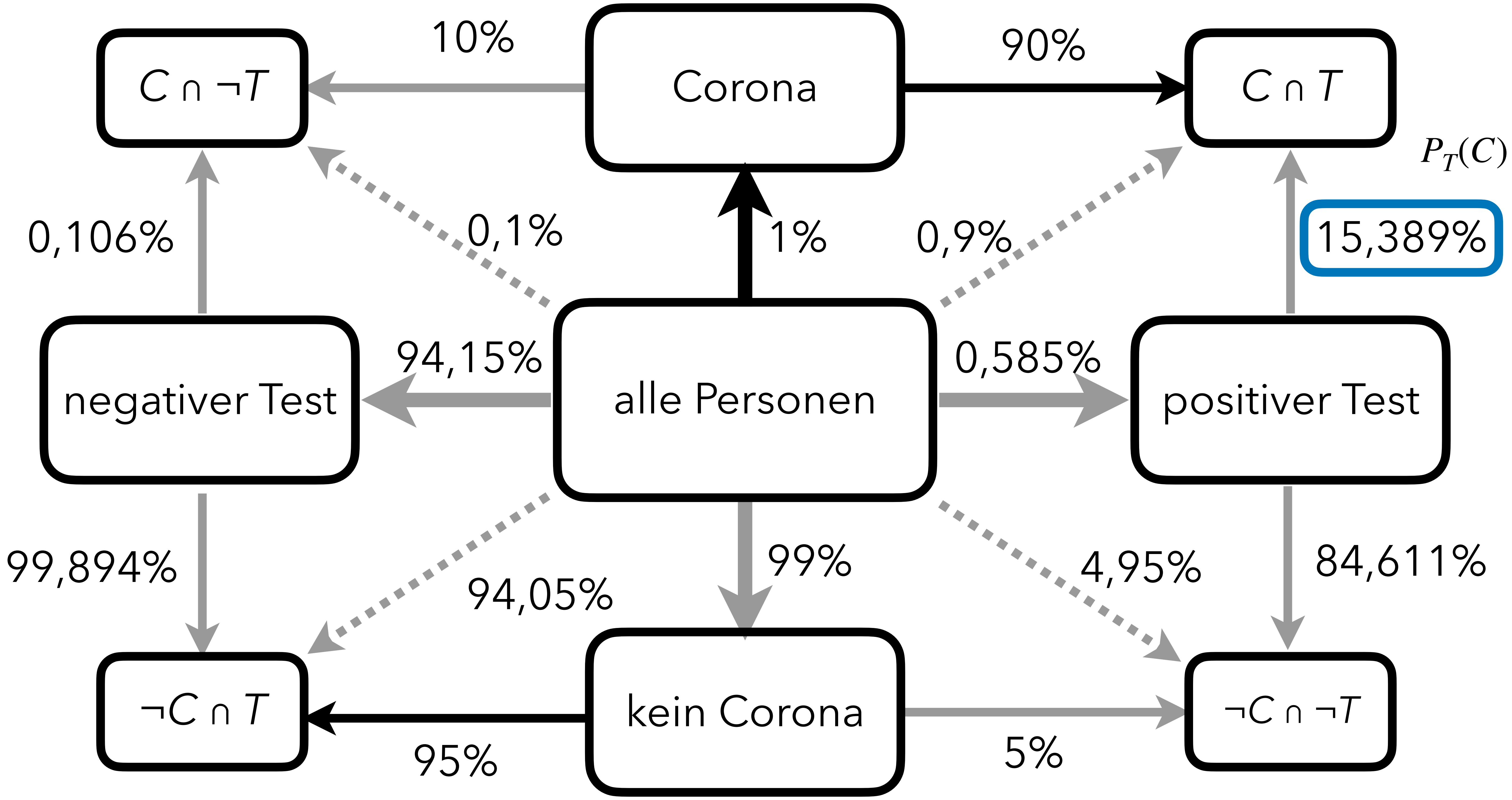
C = »an Corona erkrankt«
T = »positives Testergebnis«

Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei einem positivem Testergebnis tatsächlich erkrankt zu sein?

Prävalenz: $P(C) = 1\%$
Wahrscheinlichkeit der Erkrankung

Sensitivität: $P_C(T) = 90\%$
Wahrscheinlichkeit für positives Testergebnis, wenn Erkrankung vorliegt

Spezifität: $P_{\neg C}(\neg T) = 95\%$
Wahrscheinlichkeit für negatives Testergebnis, wenn keine Erkrankung vorliegt



$$P_T(C) = \frac{P(C \cap T)}{P(T)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeit

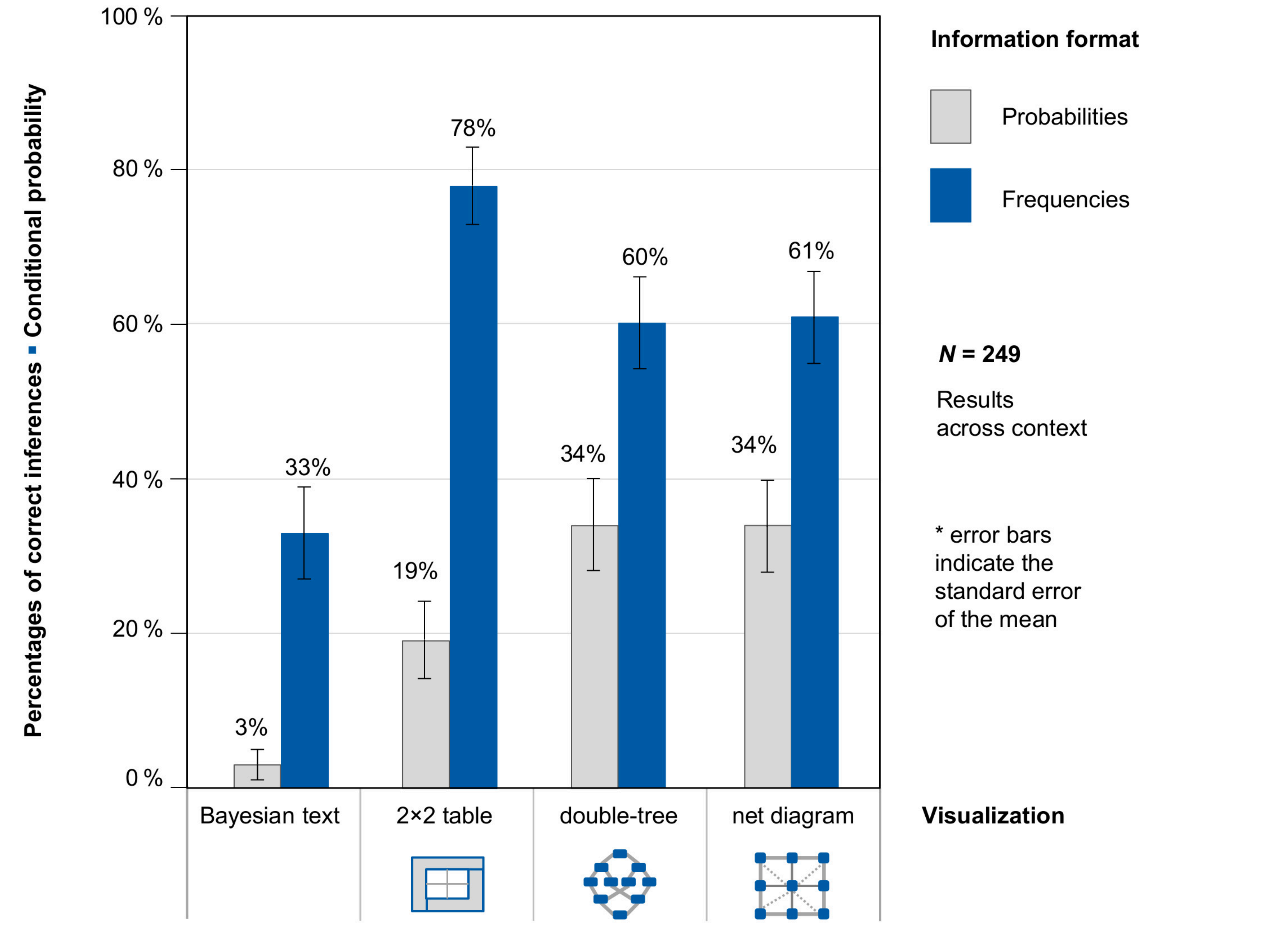


FIGURE 6 | Percentages of correct inferences in the question for a conditional probability, separated for information format and visualization type (across both contexts).

Bestimmung der Schnittwahrscheinlichkeit

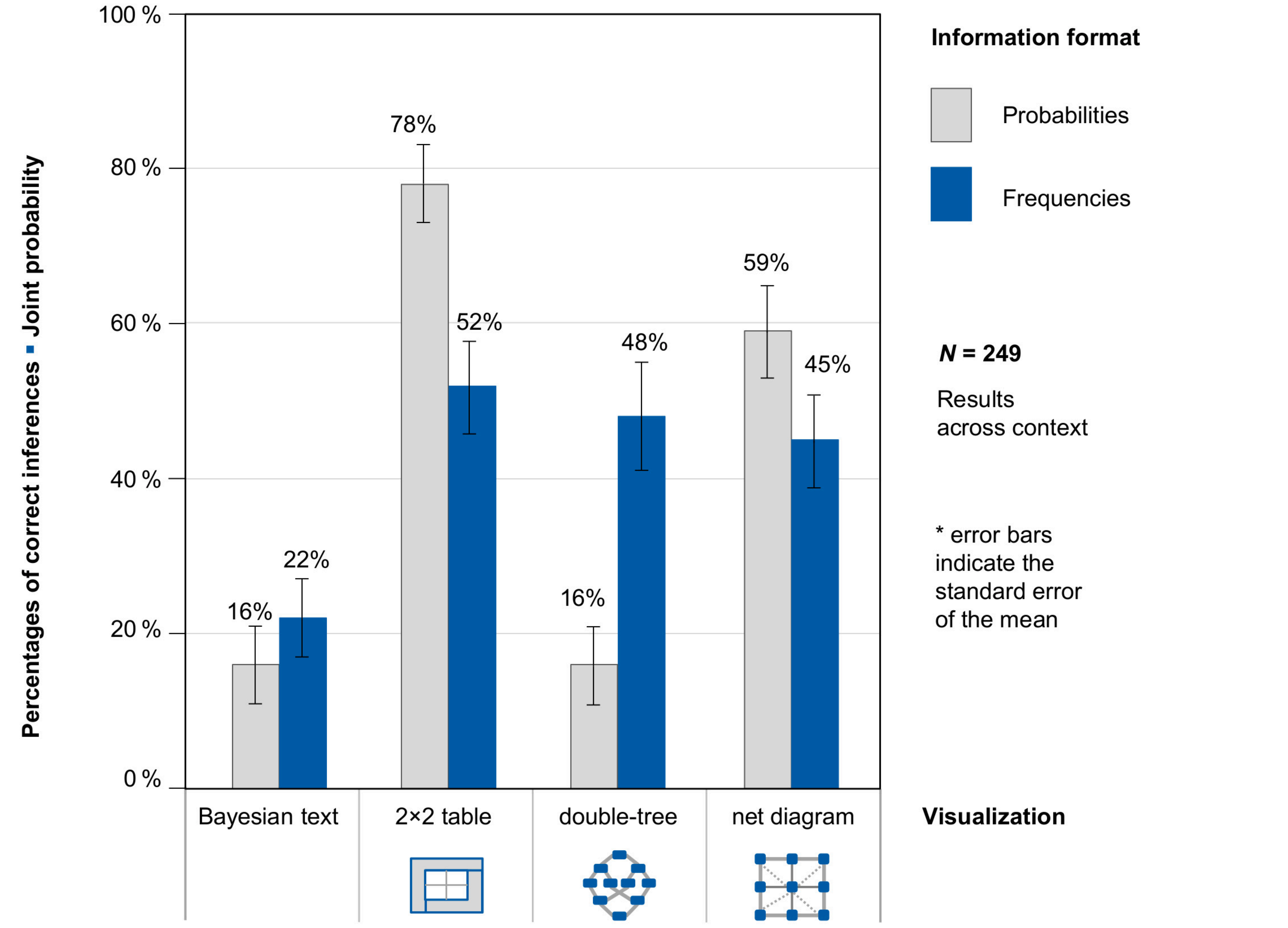


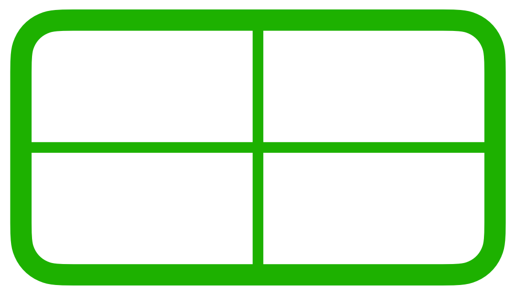
FIGURE 7 | Percentages of correct inferences in the question for a joint probability, separated for information format and visualization type (across both contexts).

(Binder et al., 2020)

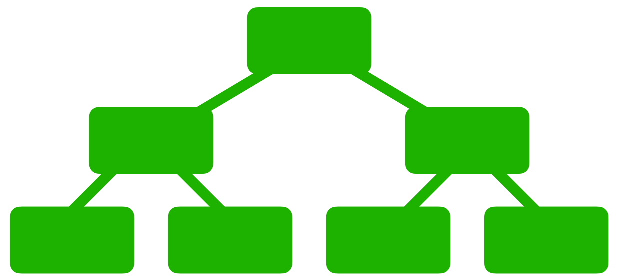
Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Mögliche Visualisierungen

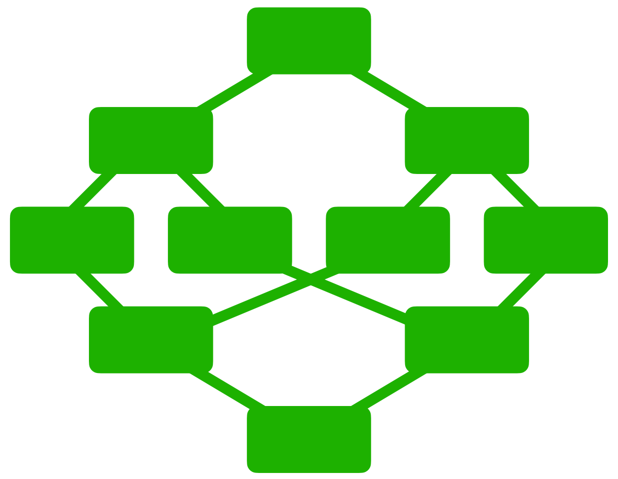
Vierfeldertafel



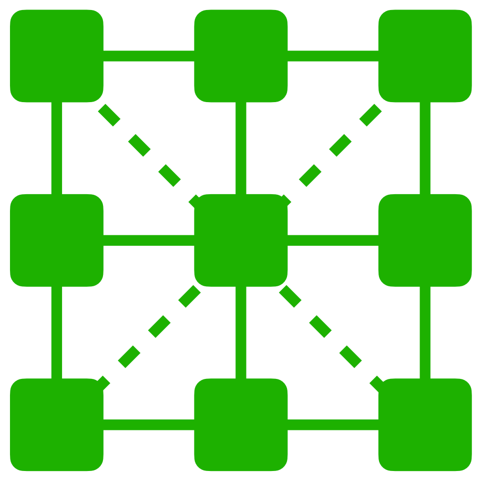
Baumdiagramm



Doppelbaum



Häufigkeitsnetz



Weitere Unterstützungen

- Vernetzung der Darstellungen
- absolute Häufigkeiten statt Wahrscheinlichkeiten

Literatur

Adam, V., & Kleine, M. (2016). *Mathe.delta: Mathematik für das Gymnasium 8, Berlin/Brandenburg*. C.C.Buchner.

Binder, K., Krauss, S., & Wiesner, P. (2020). A New Visualization for Probabilistic Situations Containing Two Binary Events: The Frequency Net. Frontiers in Psychology, 11, 750. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2020.00750

Krüger, K., Sill, H.-D., & Sikora, C. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43355-3

LISUM. (o. J.). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Daten und Zufall". Inhaltliches Konzeptbild.* Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/faecher/naturwissenschaften/mathematik/Materialien_zur_Diagnose_und_Foerderung_im_Mathematikunterricht/Daten_und_Zufall/060_Konzept_Daten_und_Zufall__180625.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf