Stoffdidaktik Mathematik

Leitidee Strukturen und funktionaler Zusammenhang

Leitidee Strukturen & funktionaler Zusammenhang

Die Leitidee umfasst funktionale Beziehungen zwischen Zahlen, Daten bzw. Größen sowie deren Darstellungen und Eigenschaften, auch unter Nutzung geeigneter digitaler Mathematikwerkzeuge. Das umfasst auch das Lösen von Gleichungen und linearen Gleichungssystemen und die Anwendung verschiedener Funktionenklassen bei der Bearbeitung von Problemen und in Sachsituationen. Die darauf bezogenen mathematischen Sachgebiete der Sekundarstufe I sind Algebra und Funktionen.

(Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland, 2022, S. 18 f.)

Die Schülerinnen und Schüler

- verwenden Variablen je nach Kontext als eine feste Zahl, als eine beliebige Zahl aus einem Zahlbereich und als Veränderliche in einem bestimmten Bereich und können Beispiele für die unterschiedliche Verwendung von Variablen nennen,
- stellen Terme auf, um allgemeine Zusammenhänge im Sachkontext zu beschreiben, formen sie um und interpretieren sie,
- nutzen die Prozentrechnung bei Wachstumsprozessen (beispielsweise bei der Zinsrechnung), auch unter Verwendung digitaler Werkzeuge,
- nutzen Maßstäbe beim Lesen und Anfertigen von Zeichnungen situationsgerecht,
- erkennen und verwenden funktionale Zusammenhänge und stellen diese in verschiedenen Repräsentationen dar (sprachlich, tabellarisch, grafisch, algebraisch) und können zwischen diesen Darstellungsformen wechseln, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- analysieren, interpretieren und vergleichen unterschiedliche funktionale Zusammenhänge (lineare, proportionale und antiproportionale sowie quadratische Funktionen), auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- lösen realitätsnahe Probleme im Zusammenhang mit linearen, proportionalen und antiproportionalen Zuordnungen, ggf. auch mit Hilfe des Dreisatzes, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- lösen lineare und quadratische Gleichungen sowie lineare Gleichungssysteme numerisch (systematisches Probieren), algebraisch (Umformen) und grafisch (mit Hilfe von Funktionsgraphen), auch unter Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge, und vergleichen die Effektivität verschiedener Lösungsverfahren im Hinblick auf die jeweilige Fragestellung oder das Problem,
- untersuchen Fragen der Lösbarkeit und der Lösungsvielfalt von linearen und quadratischen Gleichungen sowie linearen Gleichungssystemen und formulieren diesbezüglich Aussagen,
- bestimmen kennzeichnende Merkmale von Funktionen im Funktionsterm, Graph und der Wertetabelle und stellen Beziehungen zwischen den Darstellungen her,
- wenden insbesondere lineare und quadratische Funktionen sowie Exponentialfunktionen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ bei der Beschreibung und Bearbeitung von Problemen an, auch mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- verwenden die Sinusfunktion in der Form $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x)$ zur Beschreibung periodischer Vorgänge mit Hilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- beschreiben Veränderungen von Größen mittels Funktionen (auch nicht lineare Veränderungen), auch unter Verwendung digitaler Mathematikwerkzeuge,
- geben zu vorgegebenen Funktionen Sachsituationen an, die mit Hilfe dieser Funktion beschrieben werden können.

CC BY SA

Idee der Variable als Platzhalter, Unbekannte, Unbestimmte, Veränderliche	Idee der Operation als Beschreibung von Veränderungen

Idee der Terme	Idee der Gleichungen	Idee der funktionalen Zusammenhänge
Aufstellen und Interpretieren von Termen	**Aufstellen und Interpretieren von Gleichungen**	**Zuordnungsvorstellung**
Strukturieren und Beschreiben von Mustern und Bildern mit Worten	Aufstellen von Gleichungen zu Bildern und Sachzusammenhängen	Erfassen, Strukturieren und Beschreiben von Bilder- und Zahlenfolgen mit Worten und
Beschreiben von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen mit Termen	Zeichnen von Bildern, Erstellen von Zahlenrätseln und Finden von Sachzusammenhängen zu Gleichungen	Betrachten, Beschreiben und Darstellen der Zuordnung einer Größe zu einer anderen
Entwickeln von Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen zu Termen	**Lösen von Gleichungen**	**Veränderungsvorstellung**
Identifizieren, Interpretieren und Substituieren von Teiltermen	Finden von Lösungen in informellen Formaten durch systematisches Probieren und Rückwärtsarbeiten	Fortsetzen von Bilder- und Zahlenfolgen
Interpretieren von Termen mit Variablen als Operatoren	Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch systematisches Probieren, Rückwärts-arbeiten und mithilfe grafischer Darstellungen	Untersuchen und Beschreiben der Art der Abhängigkeit zweier Größen (wie sich zwei Größen miteinander verändern)
Vergleichen von Termen	Bestimmen der Lösungsmengen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen	**Objektvorstellung**
Erkennen und Finden von gleichwertigen Termen in Mustern, Bildern und Sachzusammenhängen	**Validieren und Interpretieren von Lösungen**	Untersuchen und Beschreiben von Eigenschaften zur Klassifizierung von Funktionen
Erkennen von Termen mit gleichem Termwert durch Einsetzen	Überprüfen des Wahrheitsgehalts der Gleichung	Untersuchen von Verknüpfungen von Funktionen
Untersuchen von Termbeziehungen unter Nutzung von Rechenregeln, Rechengesetzen und Umkehroperationen	Überprüfen der Lösung im Sachzusammenhang bzw. Ziehen von Schlussfolgerungen aus Lösungen	
Herstellen von äquivalenten Termen durch Umformen		

(LISUM, o. J.)

CC BY SA

Aspekte des Variablenbegriffs

Platzhalter ······	Unbekannte	Unbestimmte/ allgemeine Zahl	Veränderliche
i. d. R. keine eigenständigen Objekte	Platzhalter für eine Zahl, deren Wert nicht bekannt ist, aber prinzipiell bestimmt werden kann	allgemeine Zahl, deren Wert nicht gegeben ist bzw. zunächst nicht von Interesse ist	Zahl oder Größe, die verschiedene Werte aus einem festgelegten Bereich annehmen kann
$2 + \boxed{} = 7$	$x + 5 = 15$	$A = a \cdot b$	$f(x) = 2x + 5$

(angelehnt an Weigand et al., 2022, S. 35 f.)

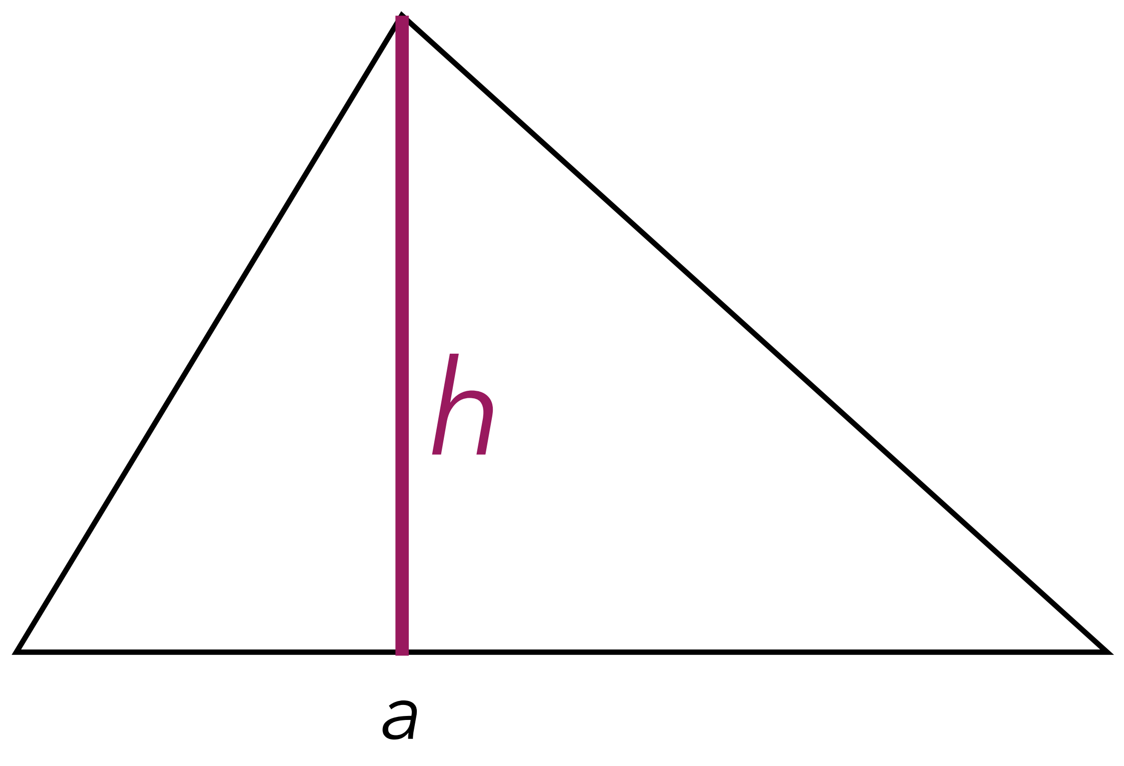
CC BY SA

Aspekte des Variablenbegriffs

Platzhalter ········ Unbekannte

Unbestimmte/ allgemeine Zahl

Veränderliche



$A = 0{,}5 \cdot a \cdot h$

Wie groß ist h, bei gegebenem A und a?

Zur Berechnung des Flächeninhalts muss ich h einsetzen.

Wie ändert sich der Flächeninhalt, wenn ich h verdopple?

(angelehnt an Barzel & Hußmann, 2011, S. 4)

CC BY SA

Variablen

Blick in den Rahmenlehrplan

1	2	3	4	5	6
A	B		C		D

7	8	9	10	Angestrebter Abschluss
D	E	F	G	EBR

7	8	9	10	Angestrebter Abschluss
E		F	G	FOR

7	8	9	10	Angestrebter Abschluss
E	F	G	H	Versetzung in die Qualifikationsphase

C

Darstellen von Sachverhalten (auch innermathematische) durch Terme und Gleichungen (auch mit mehreren Rechen-operationen)

Verwenden der Operatorschreibweise (Pfeile) zur Darstellung von Zahlenrätseln und Sachsituationen

Nutzen von Variablen im Sinne eines Platzhalters

Angeben von passenden Situationen und Bildern zu vorgegeben Termen und Gleichungen (auch mit mehreren Rechenoperationen)

D

Darstellen von außer- und innermathematischen Sachverhalten (auch im Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen) durch Zahlenterme und Gleichungen

Nutzen von Variablen im Sinne eines Platzhalters (auch bei gebrochenen Zahlen)

Angeben von passenden außer- und inner-mathematischen Sachverhalten zu vorgegeben Zahlentermen und Gleichungen (auch im Zahlenbereich der gebrochenen Zahlen)

E

Darstellen von außer- und innermathematischen Sachverhalten (auch im Zahlenbereich der rationalen Zahlen) durch Terme, lineare Gleichungen und Verhältnisgleichungen

Variablen (auch als Parameter) verwenden und deren Bedeutung erklären (z. B. in Formeln)

Angeben von passenden Situationen und grafischen Darstellungen zu vorgegeben Termen und Gleichungen (auch im Zahlenbereich der rationalen Zahlen)

(Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg, S. 16 ff., 52, 54)

Variablen

Typografische Hinweise

Sei $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$, $\mathrm{r} \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathrm{z} := \mathrm{r} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ diejenige komplexe Zahl $\mathrm{z} \in \mathbb{C}$, die mit der x-Achse den Winkel φ einnimmt und für die $|\mathrm{z}| = \mathrm{r}$ gilt.

Sei $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist $z := r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ diejenige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, die mit der x-Achse den Winkel φ einnimmt und für die $|z| = r$ gilt.

Sei $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist $z := r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ diejenige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, die mit der x-Achse den Winkel φ einnimmt und für die $|z| = r$ gilt.

Sei $r \in \mathbb{R}, r \geq 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$. Dann ist $z := r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ diejenige komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, die mit der x-Achse den Winkel φ einnimmt und für die $|z| = r$ gilt.

Variablen kursiv schreiben — $A = a \cdot b$ statt $\mathrm{A} = \mathrm{a} \cdot \mathrm{b}$

Zahlen und Rechenzeichen aufrecht — $y = 2x$ statt $\mathit{y = 2x}$

Unveränderliche ebenfalls aufrecht — $r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ statt $r \cdot e^{i\varphi}$

Minus als Halbgeviert und mit Leerzeichen — – 2 statt -2

CC BY SA

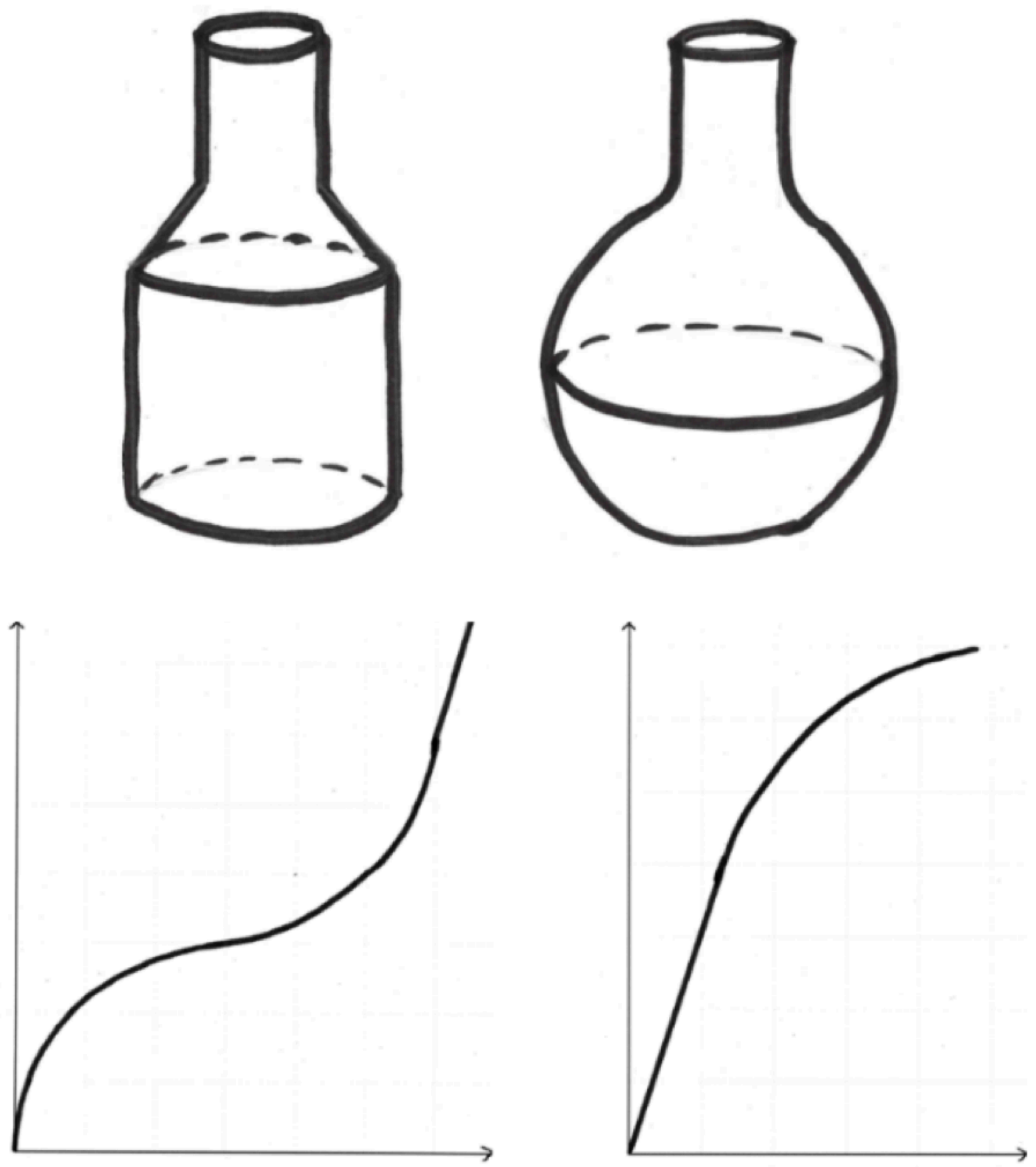
Aspekte des Funktionenbegriffs

Zuordnung

x	- 2	- 1	0	1	2
y	8	2	0	2	8

Handelt es sich um eine Funktion?

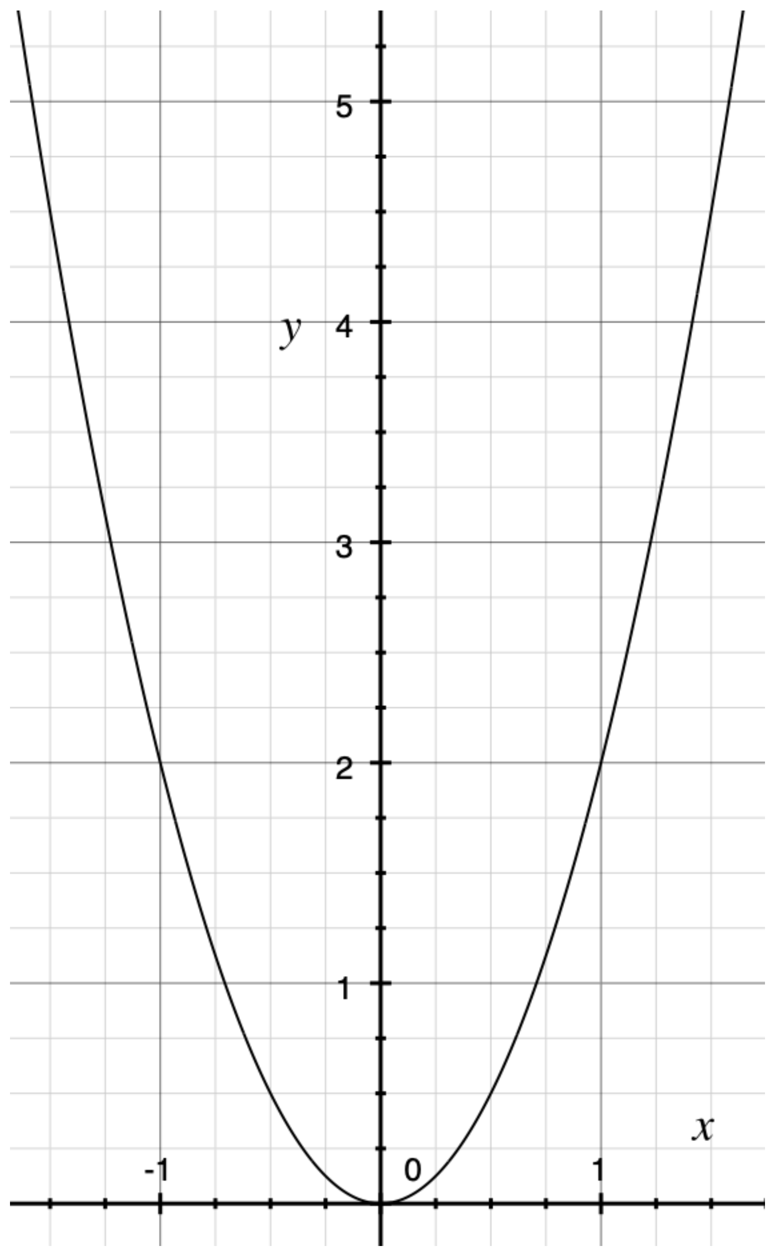
Änderung/Kovariation



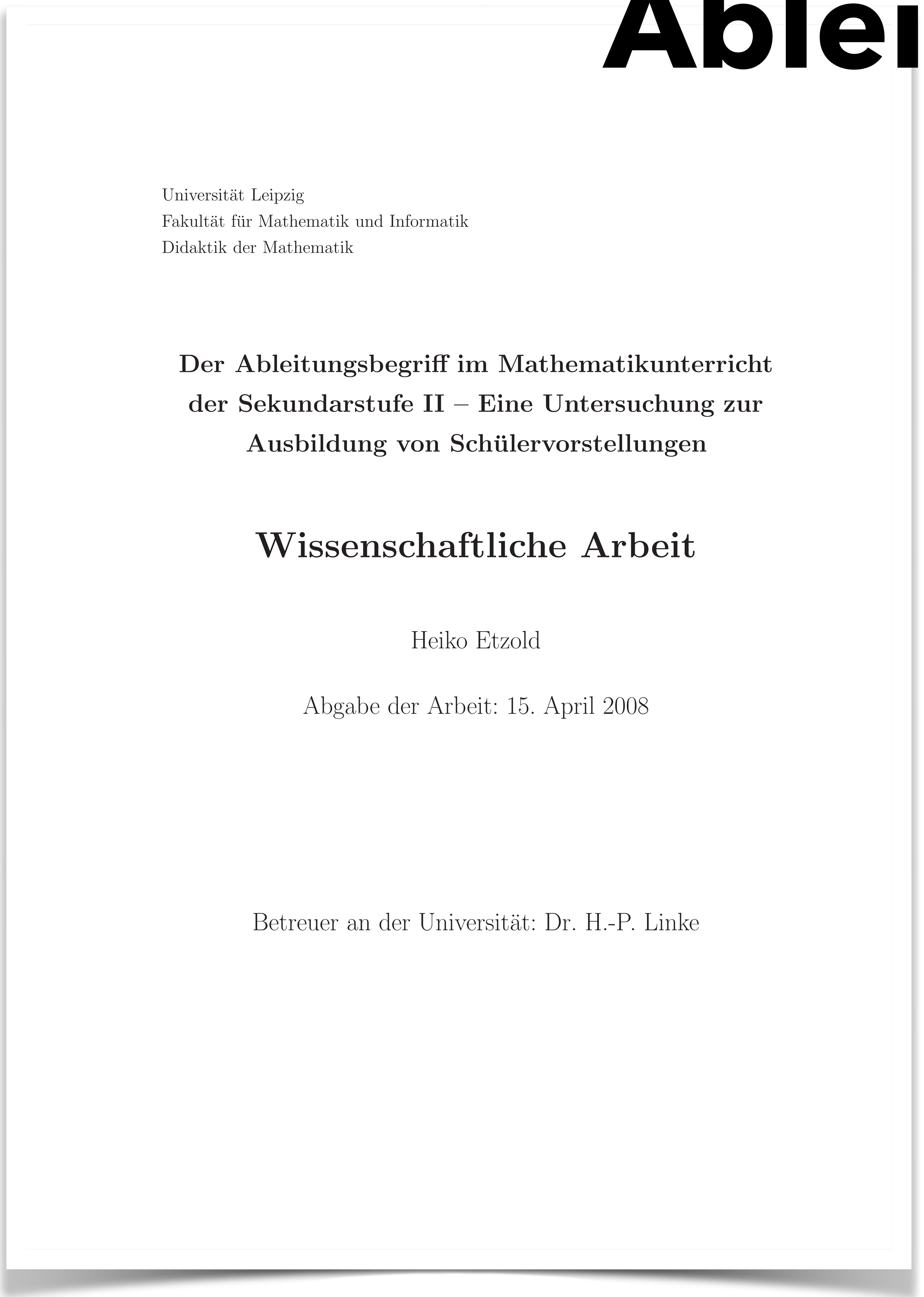
(Zentgraf, 2020, S. 1066)

Objekt

Parametereinfluss



Ableitung einer Funktion


Universität Leipzig
Fakultät für Mathematik und Informatik
Didaktik der Mathematik

Der Ableitungsbegriff im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II – Eine Untersuchung zur Ausbildung von Schülervorstellungen

Wissenschaftliche Arbeit

Heiko Etzold

Abgabe der Arbeit: 15. April 2008

Betreuer an der Universität: Dr. H.-P. Linke

(Etzold, 2008)

lokale Änderungsrate

Ableitung einer Funktion an einer Stelle beschreibt, wie stark sich die Funktionswerte in der Umgebung dieser Stelle verändern

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Ableitung als Anstieg der Tangente

lokale Linearität

Existenz der Ableitung einer Funktion an einer Stelle („Differenzierbarkeit“) beschreibt die Möglichkeit, die Funktion lokal durch eine lineare Funktion annähern zu können

$$f(x) = f(x_0) + mx + r(h) \text{ mit } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Ableitung als Anstieg der besten linearen Näherung

Literatur

Barzel, B., & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *mathematik lehren, 169*, 2–7.

Etzold, H. (2008). *Der Ableitungsbegriff im Mathematikunterricht der Sekundarstufe II – Eine Untersuchung zur Ausbildung von Schülervorstellungen* [1. Staatsexamensarbeit, Universität Leipzig]. https://doi.org/10.5281/zenodo.7538430

LISUM. (o. J.). *Materialien zur Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht – Leitidee „Gleichungen und Funktionen". Inhaltliches Konzeptbild*. Abgerufen 25. Januar 2022, von https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/rlp-online/Teil_C/Mathematik/Materialien/Materialien_zum_Themenfeld_Gleichungen_und_Funktionen/009_L4_Konzeptbild.pdf

Ministerium für Bildung, Jugend und Sport des Landes Brandenburg. (2015). *Rahmenlehrplan Brandenburg Sek. I. Teil C - Mathematik*. https://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene/Rahmenlehrplanprojekt/amtliche_Fassung/Teil_C_Mathematik_2015_11_10_WEB.pdf

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland. (2022a). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss (ESA) und Mittlerer Schulabschluss (MSA)*. (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 und vom 04.12.2003, i.d.F. vom 23.06.2022). https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

Weigand, H.-G., Schüler-Meyer, A., & Pinkernell, G. (2022). *Didaktik der Algebra: nach der Vorlage von Hans-Joachim Vollrath*. Springer Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-64660-1

Zentgraf, K. (2020). Auffalten von Grundvorstellungen bei funktionalen Zusammenhängen – am Beispiel Füllgraphen. In H.-S. Siller, W. Weigel, & J. F. Wörler (Hrsg.), *Vorträge auf der 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 09. Bis 13. März 2020 in Würzburg* (S. 1065–1068). https://doi.org/10.17877/DE290R-21643